

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta020***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(3, 4)$ și $C(4, -5)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$.
- (4p) d) Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 25$ în punctul $P(3, -4)$.
- e) Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB = 2$, $AC = 2$ și $m(\angle BAC) = \frac{\pi}{6}$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $a + bi = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^3$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze elementul $\hat{2}^{2007}$ în (\mathbb{Z}_3, \cdot) .
- (3p) b) Să se calculeze expresia $E = C_{12}^3 - C_{12}^9$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_2 x = \log_4 x$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x = 4^x$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n! < n^3$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x - 10$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+3}{8n-2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ iar în mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & -b \\ 0 & x \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} x & 0 \\ c & y \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbf{C}$. Notăm prin $tr(A) = a + d$ urma matricei A .

- (4p) a) Să se calculeze $tr(I_2)$.
- (4p) b) Să se arate că $tr(X + Y) = tr(X) + tr(Y)$ și $tr(XY) = tr(YX)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$.
- (4p) c) Să se calculeze $UV - VU$, unde $U = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, atunci se pot alege $x, y \in \mathbf{C}$ astfel încât matricele B și C să verifice relația $D = C - B$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $b \neq 0$, $c \neq 0$, atunci matricea $S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ este inversabilă și $S^{-1}BS = C$.
- (2p) f) Să se arate că nu există $X, Y \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $I_2 = XY - YX$.
- (2p) g) Să se arate că pentru o matrice oarecare $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$, cu $bc \neq 0$, există matricele $X, Y \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $W = XY - YX$ dacă și numai dacă $tr(W) = 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirurile $(I_n)_{n \geq 0}$, definit prin $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $n \geq 1$ și $(w_n)_{n \geq 1}$ definit prin $w_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{2n+1}$.

- (4p) a) Să se calculeze I_0 și I_1 .
- (4p) b) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$.
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se arate că $I_{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se verifice că $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = (w_n)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Varianta 20

Subiectul I.

- a) $|\vec{v}| = 13$.
- b) $AC = \sqrt{82}$.
- c) $\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- d) Ecuăția tangentei este: $3x - 4y - 25 = 0$.
- e) $BC = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.
- f) $a = 0$ și $b = 1$.

Subiectul II.

1.

- a) În (\mathbb{Z}_3, \cdot) , avem $\hat{2}^{2007} = \hat{2}$.
- b) $E = 0$
- c) $x = 1$.
- d) $x = 0$.
- e) Probabilitatea căutată este $p = \frac{4}{5}$.

2.

- a) $f'(x) = 3x^2 + 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- b) $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{35}{4}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$.
- d) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+3}{8n-2} = \frac{7}{8}$.

Subiectul III.

- a) $tr(I_2) = 2$.
- b) Relațiile se demonstrează prin calcul direct.
- c) $UV - VU = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$.

d) $D=C-B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & b \\ c & y-x \end{pmatrix} \Leftrightarrow x-y=a \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha-a \end{cases}, \alpha \in \mathbf{C}.$

e) Avem $\det(S) = \frac{b}{c} \neq 0$, aşadar matricea S este inversabilă, inversa sa fiind matricea

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{b} & 0 \end{pmatrix}. \text{ Relația } S^{-1}BS = C \text{ se arată prin calcul direct.}$$

f) Se demonstrează prin reducere la absurd, arătând că $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{C})$, matricele I_2 și $XY - YX$ nu au aceeași urmă.

g) Dacă pentru matricea $W \in M_2(\mathbf{C})$, există matricele $X, Y \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $W = XY - YX$, evident, $tr(W) = 0$.

Reciproc, fie $W \in M_2(\mathbf{C})$ cu $tr(W) = 0$, de forma $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbf{C}$.

Deoarece $b \neq 0$, $c \neq 0$, din punctele d) și e) rezultă că există matricele $B, C \in M_2(\mathbf{C})$ ca în enunț, astfel că $W = C - B = S^{-1}BS - B = S^{-1}(BS) - (BS)S^{-1}$.

Subiectul IV.

a) $I_0 = \frac{\pi}{2}$ și $I_1 = 1$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se folosește relația de recurență de la punctul b) și primul principiu de inducție.

d) Se folosește relația de recurență de la punctul b) și primul principiu de inducție.

e) Se arată ușor că sirul $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict descrescător și că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $I_n > 0$.

Atunci, $0 < I_{n+1} < I_n \Rightarrow \frac{I_n}{I_{n+1}} > 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$

și folosind punctul b) se deduce imediat concluzia.

f) Din c) și d) rezultă $I_{2n} = \frac{w_n}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2}$ și $I_{2n+1} = \frac{1}{w_n \cdot \sqrt{2n+1}}$, de unde

$$\text{obținem } \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = w_n^2 \cdot \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

g) Trecând la limită în dubla inegalitate de la e) și folosind criteriul cleștelui, obținem

$$\text{că } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1, \text{ deci și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

Din f) rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.