

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta019***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(1, 2)$ la dreapta de ecuație $4x - 3y + 3 = 0$.
- (4p) b) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele $A(1, 3, 5)$, $B(5, 3, 1)$.
- (4p) c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul $M(2, a)$ să aparțină dreptei de ecuație $2x - 3y + 5 = 0$.
- (4p) d) Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta $y = x$ și hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.
- (2p) e) Să se calculeze $\tan \frac{\pi}{4}$.
- (2p) f) Să se calculeze suma de numere complexe $1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3}$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze $\log_2 4$.
- (3p) b) Să se calculeze $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \cdot \hat{7}$ în \mathbf{Z}_8 .
- (3p) c) Să se calculeze $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!}$.
- (3p) d) Să se determine probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ să fie soluție a inecuației $n^2 + 5n - 6 < 0$.
- (3p) e) Să se rezolve ecuația $2^{x^2} = 16$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (3p) b) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[e, \infty)$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) d) Să se determine asimptota orizontală la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$ și polinomul $f = X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \dots + a_1 \cdot X - 1 \in \mathbf{R}[X]$ ale căruia rădăcini $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{C}$ verifică $|z_1| \geq 1, |z_2| \geq 1, \dots, |z_n| \geq 1$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$ și $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n$.
- (4p) b) Să se arate că $|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| = 1$.
- (4p) c) Să se arate că polinomul f are cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.
- (2p) d) Să se demonstreze că $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$.
- (2p) e) Să se demonstreze că $f(1) = 0$.
- (2p) f) Dacă n este par, să se arate că polinomul $X^2 - 1$ îl divide pe f .
- (2p) g) Dacă $a_{n-1} = -n$, să se arate că $f = (X - 1)^n$ și n este impar.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \left[x + \frac{1}{2} \right]$ și $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = |f(x) - x|$,

unde $\left[x + \frac{1}{2} \right]$ înseamnă partea întreagă a numărului real $x + \frac{1}{2}$.

- (4p) a) Să se arate că $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ 1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ și $g(x) = |x|$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.
- (4p) b) Să se arate că funcția g este periodică de perioadă $T = 1$ și este continuă pe \mathbf{R} .
- (4p) c) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.
- (2p) d) Să se demonstreze că $\int_{k-1}^k g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că $\int_0^1 g(x) \cdot g(nx) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(x) \cdot g(nx) dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ și $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, există $x'_k, x''_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$, astfel încât
$$g(x'_k) \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx) dx \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(x) \cdot g(nx) dx \leq g(x''_k) \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx) dx.$$
- (2p) Folosind faptul că pentru $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și orice $y_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$, avem
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(y_k) = \int_0^1 g(x) dx$$
, să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x) \cdot g(nx) dx = \left(\int_0^1 g(x) dx \right)^2$.

Varianta 19

Subiectul I.

- a) Distanță căutată este $\frac{1}{5}$.
- b) Mijlocul segmentului AB este punctul $P(3, 3, 3)$
- c) $a = 3$.
- d) Punctele căutate sunt $A\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$ și $B\left(-\frac{20}{3}, -\frac{20}{3}\right)$.
- e) $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.
- f) $1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} = 0$.

Subiectul II.

1.

- a) $\log_2 4 = 2$.
- b) În mulțimea \mathbf{Z}_8 , $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \cdot \hat{6} \cdot \hat{7} = \hat{0}$.
- c) $\frac{23}{24}$.
- d) Probabilitatea căutată este $p = 0$.
- e) $x \in \{-2, 2\}$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- b) $f'(x) < 0$, $\forall x \in (e, \infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe intervalul $[e, \infty)$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$.
- d) Dreapta $Ox : y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Subiectul III.

- a) $f(0) = -1$ și $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = (-1)^{n+1}$.
- b) Din a) obținem: $|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| = -1$.
- c) Evident, deoarece $f(0) = -1 < 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.
- d) Din b) avem: $|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| = 1$.

Folosind ipoteza, deducem că $|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| \geq 1$ și că egalitatea are loc dacă și numai dacă avem $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$.

e) Se folosesc c) și d).

f) Pentru n număr par, polinomul f are și rădăcina -1 , așadar polinomul $X^2 - 1$ îl divide pe f .

g) Eventual renumerotând rădăcinile polinomului f , putem alege $z_1 = 1$.

Aplicând prima relație a lui Viète, obținem:

$$n = |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \stackrel{\text{d)}{=} n$$

În inegalitatea precedentă avem egalitate, dacă și numai dacă

$$\forall k \in \{2, \dots, n\}, \text{ există } a_k \in (0, \infty) \text{ astfel încât } z_k = a_k \cdot z_1 = a_k.$$

Obținem $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 1$, iar $f = (X - 1)^n$.

Deoarece termenul liber al lui f este -1 , rezultă că numărul n este impar.

Subiectul IV.

a) $[y] = \begin{cases} -1, & y \in [-1, 0) \\ 0, & y \in [0, 1) \\ 1, & y \in [1, 2) \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow g(x) = |x|, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

b) Se arată ușor că $g(x+1) = g(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Funcția g este continuă pe $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ și deoarece este periodică, de perioadă $T = 1$

pe \mathbf{R} , rezultă că g este continuă pe \mathbf{R} .

c) $\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{4}.$

d) Făcând schimbarea de variabilă $x - (k-1) = t$ obținem

$$\int_{k-1}^k g(x) dx = \int_0^1 g(t + (k-1)) dt \stackrel{g \text{ periodică}}{=} \int_0^1 g(t) dt.$$

e) Evident, folosind aditivitatea integralei obținem, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\int_0^1 g(x) \cdot g(nx) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} g(x) \cdot g(nx) dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} g(x) \cdot g(nx) dx + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} g(x) \cdot g(nx) dx.$$

f) Pentru $k \in \mathbf{N}^*$, funcția g este continuă pe $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, deci există $x'_k, x''_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$,

$$\text{astfel încât } g(x'_k) = \min_{x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} g(x) \text{ și } g(x''_k) = \max_{x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} g(x),$$

adică $g(x'_k) \leq g(x) \leq g(x''_k)$, $\forall x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$.

Înmulțind relația precedentă cu $g(nx) \geq 0$, obținem:

$$g(x'_k) \cdot g(nx) \leq g(x) \cdot g(nx) \leq g(x''_k) \cdot g(nx), \quad \forall x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$$

și integrând ultima inegalitate pe intervalul $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$, deducem concluzia.

g) Însumăm relațiile de la punctul **f)** și obținem:

$$\sum_{k=1}^n g(x'_k) \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx) dx \leq \int_0^1 g(x) \cdot g(nx) dx \leq \sum_{k=1}^n g(x''_k) \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx) dx \quad (1)$$

Făcând schimbarea de variabilă $nx = t$ și folosind punctul **d)** rezultă ușor că

$$\sum_{k=1}^n g(x'_k) \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 g(x) dx \right)^2 \text{ și } \sum_{k=1}^n g(x''_k) \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 g(x) dx \right)^2.$$

Folosind criteriul cleștelui în (1), obținem concluzia.