

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta018***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $(3+4i)^4$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \dots \cdot \cos 179^\circ$.
- (4p) c) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}$.
- (4p) d) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(2, 3)$ și $B(3, 2)$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, 3)$, $B(3, 2)$ și $C(4, 4)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(1-2i)^4 = a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 3 și rația este 2, să se calculeze termenul al patrulea.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $n+9 < 3^n$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$ are inversa $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, să se calculeze $g(1)$.
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 7) = 3$.
- (3p) e) Să se calculeze suma tuturor rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X - 24$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctgx + \operatorname{arcctgx}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) c) Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și funcția $f : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R})$, $f(X) = AX - XA$.

- (4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) b) Să se calculeze $f(O_2)$ și $f(I_2)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(aX) = af(X)$, $\forall X \in M_2(\mathbf{R})$ și $\forall a \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) e) Să se găsească o bază a spațiului vectorial $(M_2(\mathbf{R}), +)$ peste corpul de scalari $(\mathbf{R}, +, \cdot)$.
- (2p) f) Să se arate că funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.
- (2p) g) Să se arate că $f(X) + f(Y) \neq I_2$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{R})$

SUBIECTUL IV (20p)

- (4p) a) Să se verifice că $\frac{1}{1-a} = 1 + a + \dots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $\forall a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
- (4p) b) Să se deducă relația $\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}} = 1 - \sqrt[4]{x} + (\sqrt[4]{x})^2 - \dots + (-1)^n (\sqrt[4]{x})^n + (-1)^{n+1} \frac{(\sqrt[4]{x})^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (4p) c) Să se arate că $0 \leq \frac{(\sqrt[4]{x})^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}} \leq (\sqrt[4]{x})^{n+1}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{(\sqrt[4]{x})^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}} dx = 0$, $\forall b \in [0,1]$
- (2p) e) Să se calculeze integrala $\int_0^b \frac{1}{1+\sqrt[4]{x}} dx$, unde $b > 0$.
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{4}+1}}{\frac{2}{4}+1} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{4}+1}}{\frac{n}{4}+1} \right) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[4]{t}} dt$, $\forall x \in [0,1]$.
- (2p) g) Să se arate că există $x \in (0,1)$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{4}+1}}{\frac{2}{4}+1} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{4}+1}}{\frac{n}{4}+1} \right) \in \mathbf{Q}$.

Varianta 18

Subiectul I.

- a) $\left| (3+4i)^4 \right| = 625$
 b) 0.
 c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
 d) $AB = \sqrt{2}$.
 e) $S_{ABC} = \frac{3}{2}$.
 f) $a = -7$ și $b = 24$

Subiectul II.

1.

- a) $a_4 = 24$.
 b) Probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$.
 c) $g(1) = 0$.
 d) $x \in \{-1, 1\}$.
 e) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

2.

- a) $f'(x) = 0$. Se deduce că funcția f este constantă pe \mathbf{R} .

Mai mult, deoarece $f(1) = \frac{\pi}{2}$, rezultă $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

c) Asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției este dreapta de ecuație $y = \frac{\pi}{2}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Subiectul III.

- a) $\det(A) = 1 \neq 0$, deci $\text{rang}(A) = 2$.
 b) $f(O_2) = O_2$, $f(I_2) = O_2$.
 c) Calcul direct.
 d) Calcul direct.

e) $B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, cu $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

este o bază.

f) Deoarece $f(O_2) = f(I_2)$, funcția f nu este injectivă.

Dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, atunci suma elementelor de pe diagonala principală a lui $f(X)$ este 0, deci $\forall X \in M_2(\mathbf{R})$, $f(X) \neq I_2$, adică f nu este surjectivă.

g) Dacă $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$, din d) avem: $f(X) + f(Y) = f(X + Y) \stackrel{f}{=} I_2$.

Subiectul IV.

a) Se verifică prin calcul direct.

b) Punând $a = -\sqrt[4]{x}$ în egalitatea de la a) se obține concluzia.

c) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ și $x \in [0, 1]$, avem $1 + \sqrt[4]{x} \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x}} \leq 1$

și înmulțind ultima inegalitate cu $(\sqrt[4]{x})^{n+1} \geq 0$ obținem $0 \leq \frac{(\sqrt[4]{x})^{n+1}}{1 + \sqrt[4]{x}} \leq (\sqrt[4]{x})^{n+1}$.

d) Pentru $b \in [0, 1]$, integrând pe intervalul $[0, b]$ inegalitatea de la c) și folosind

faptul că avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b}{4}^{\frac{n+1}{4}}}{\frac{n+1}{4} + 1} = 0$, deducem $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{(\sqrt[4]{x})^{n+1}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx = 0$.

e) Făcând schimbarea de variabilă $1 + \sqrt[4]{x} = y > 0$, se calculează mai întâi o primitivă a funcției f pe intervalul $(0, b]$ și apoi se prelungește prin continuitate la $[0, b]$.

Obținem că o primitivă pe $[0, b]$ a funcției f este:

$$F(x) = \begin{cases} 4 \cdot \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{x})^3}{3} - 3 \frac{(1 + \sqrt[4]{x})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x}) - \ln(1 + \sqrt[4]{x}) \right), & x \in (0, b] \\ \frac{22}{3}, & x = 0 \end{cases}$$

Folosind teorema Leibniz-Newton, obținem:

$$\int_0^b \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x}} dx = F(b) - F(0) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{b^3} - 2\sqrt{b} + 4\sqrt[4]{b} - 4 \cdot \ln(1 + \sqrt[4]{b}).$$

f) Din b) avem

$$\frac{1}{1 + \sqrt[4]{t}} = 1 - \sqrt[4]{t} + (\sqrt[4]{t})^2 - \dots + (-1)^n (\sqrt[4]{t})^n + (-1)^{n+1} \frac{(\sqrt[4]{t})^{n+1}}{1 + \sqrt[4]{t}}, \quad \forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbf{N}.$$

Pentru $x \in [0, 1]$, integrând pe intervalul $[0, x]$ această egalitate, se obține

$$x + \frac{(-1)^1 x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{4}+1}}{\frac{2}{4}+1} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{n}{4}+1}}{\frac{n}{4}+1} + (-1)^{n+1} \cdot \int_0^x \frac{(\sqrt[4]{t})^{n+1}}{1+\sqrt[4]{t}} dt = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[4]{t}} dt \quad (2)$$

Din **d)** obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \cdot \int_0^b \frac{(\sqrt[4]{x})^{n+1}}{1+\sqrt[4]{x}} dx = 0$.

Trecând la limită în (2) obținem concluzia.

g) Concluzia subpunctului înseamnă că există $x \in (0, 1)$ astfel încât $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt[4]{t}} dt \in \mathbf{Q}$.

Deoarece funcția g are proprietatea lui Darboux pe $(0, 1)$, afirmația anterioară este evidentă.