

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta017***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\cos 2 + i \sin 2$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1, 2)$ la punctul $C(0, 1)$.
- (4p) c) Să se calculeze coordonatele punctului de intersecție dintre cercul $x^2 + y^2 = 25$ și dreapta $3x + 4y - 25 = 0$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(4, 1)$, $M(6, 3)$ și $N(7, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(2, 4, 0)$ și $D(1, 2, 3)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(-1 + i\sqrt{3})^4 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se verifice identitatea $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se arate că, dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci $x = y = z$.
- (3p) c) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $4^x + 9^x + 49^x = 6^x + 14^x + 21^x$.
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^3 = \hat{x}$.
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^4 - X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este monoton crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru fiecare matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ notăm cu $S(A)$ suma elementelor sale,

cu $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ transpusa ei și cu $\det A$ determinantul matricei A .

- (4p) a) Să se arate că $S(A^T) = S(A) = a + b + c + d$.
- (4p) b) Să se arate că $S(x \cdot P + y \cdot Q) = x \cdot S(P) + y \cdot S(Q)$, $\forall P, Q \in M_2(\mathbf{R})$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $S(A \cdot A^T) = (a + c)^2 + (b + d)^2$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $S(A \cdot A^T) = 0$, atunci $\det A = 0$.
- (2p) e) Să se arate că $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall P, Q \in M_2(\mathbf{R})$,
$$S((P + xQ) \cdot (P^T + x \cdot Q^T)) = S(P \cdot P^T) + x(S(P \cdot Q^T) + S(Q \cdot P^T)) + x^2 \cdot S(Q \cdot Q^T).$$
- (2p) f) Să se arate că, dacă $P, Q \in M_2(\mathbf{R})$ și $\det Q \neq 0$ atunci funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,
$$f(x) = S((P + xQ)(P^T + xQ^T))$$
 are gradul egal cu 2.
- (2p) g) Să se arate că $S(P \cdot P^T) \cdot S(Q \cdot Q^T) \geq S(P \cdot Q^T) \cdot S(Q \cdot P^T)$, $\forall P, Q \in M_2(\mathbf{R})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru $n \in \mathbf{N}$ se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f_n(x) = x^n + \ln x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'_n(x)$, $x > 0$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f_n este monoton crescătoare, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f_n este bijectivă, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}$, ecuația $f_n(x) = 0$ are o unică soluție $x_n \in (0, 1)$.
- (2p) f) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător.
- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

VARIANTA 017**Subiectul I**

a) $|z| = 1$. b) $DC = \sqrt{2}$. c) $A(3,4)$; d) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. e) $V = \frac{4}{3}$. f) $a = -8$. g) $b = 8\sqrt{3}$.

Subiectul II

1. a) prin calcul direct. b) $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$.
 c) $(2^x)^2 + (3^x)^2 + (7^x)^2 = 2^x \cdot 3^x + 2^x \cdot 7^x + 3^x \cdot 7^x \Rightarrow 2^x = 3^x = 7^x \Rightarrow x = 0 \in \mathbf{R}$.
 d) $(\forall)x \in \mathbf{Z}_6$ este solutie a ecuatiei $\hat{x}^3 = \hat{x} \Rightarrow p = 1$. e) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.
 2. a) $f'(x) = \sin x + x \cos x$. b) $\int_0^1 f(x) dx = \sin 1 - \cos 1$.
 c) $f'(x) \geq 0, (\forall)x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f$ monoton crescatoare. d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$.
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Subiectul III

- a) calcul direct.
 b) calcul direct c) calcul direct
 d) $S(A \cdot A^t) = 0 \Rightarrow a = -c$ si $b = -d \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$.
 e) $S((A + xB)(A^t + xB^t)) = S(A \cdot A^t + x(B \cdot A^t + A \cdot B^t) + x^2 B \cdot B^t) = S(A \cdot A^t) + xS(B \cdot A^t + A \cdot B^t) + x^2 S(B \cdot B^t) = S(A \cdot A^t) + x(S(B \cdot A^t) + S(A \cdot B^t)) + x^2 S(B \cdot B^t)$.
 f) Avem $S((A + xB)(A^t + xB^t)) = S(A \cdot A^t) + xS(B \cdot A^t + A \cdot B^t) + x^2 S(B \cdot B^t)$ este o functie polimomiala de gradul 2 deoarece $\det B \neq 0$ implica $S(B \cdot B^t) \neq 0$.
 g) Din $S(B \cdot A^t) = S((B \cdot A^t)^t) = S(A \cdot B^t)$ rezulta $\Delta = S(A \cdot B^t) \cdot S(B \cdot A^t) - S(A \cdot A^t) \cdot S(B \cdot B^t)$.
 Din e) $\Rightarrow \Delta \leq 0$, adica inegalitatea ceruta.

Subiectul IV

- a) $f'_n(x) = nx^{n-1} + \frac{1}{x}$.
 b) $f'_n(x) > 0, (\forall)x > 0 \Rightarrow f_n$ strict crescatoare.
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
 d) f'_n este pozitiva pe $(0, \infty)$ $\Rightarrow f_n$ este strict crescatoare pe $(0, \infty)$, deci este injectiva. Din punctul c rezulta ca f_n este surjectiva fiind continua. Deci f_n este bijectiva.
 e) Deoarece $f_n(1) = 1$ si $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$ rezulta ca ecuatiei $f_n(x) = 0$ are o solutie $x_n \in (0, 1)$. Unicitatea solutiei rezulta din bijectivitatea lui f_n .
 f) $x_{n+1}^{n+1} + \ln x_{n+1} = 0$ si $x_n^n + \ln x_n = 0$ si $x_n, x_{n+1} \in (0, 1) \Rightarrow x_{n+1}^n - x_n^n + \ln x_{n+1} - \ln x_n > x_{n+1}^{n+1} - x_n^n + \ln x_{n+1} - \ln x_n = 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in (0,1]$, deoarece sirul este monoton si marginit.

Daca presupunem $l \neq 1$ trecand la limita in relatia $x_n^n + \ln x_n = 0$ obtinem $0 + \ln l = 0 \Rightarrow l = 1$.

Prin urmare $l = 1$.