

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D****Varianta016**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{5} + 2i$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $E(3,4)$ la dreapta $x + y + 3 = 0$.
- (4p) c) Să se scrie ecuația cercului cu centrul în $E(3,4)$ și care este tangent dreptei $x + y + 3 = 0$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(1, 2)$, $M(3, 3)$ și $N(5, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 1, 4)$, $B(1, 4, 1)$, $C(4, 1, 1)$ și $D(-1, 0, -3)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2 + 3i)(4 + 5i) = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se arate că $C_{x+1}^{y+1} = \frac{x+1}{y+1} C_x^y$, $\forall x, y \in \mathbb{N}^*, x \geq y$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_8$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 10$, are inversă $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(11)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 3^x + 9^x = 15$.
- (3p) e) Să se calculeze produsul tuturor rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X^2 - 2X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2007} + 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 (e^x + \sin x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $K = \{\hat{a}X + \hat{b} \mid \hat{a}, \hat{b} \in \mathbf{Z}_5\}$ și polinomul $f = X^2 + \hat{2} \in \mathbf{Z}_5[X]$.

Pe mulțimea K se consideră legile "+" (adunarea polinoamelor cu coeficienți în corpul \mathbf{Z}_5) și "◦" definită prin $(\hat{a}X + \hat{b}) \circ (\hat{c}X + \hat{d}) = (\hat{a}\hat{d} + \hat{b}\hat{c})X + \hat{b}\hat{d} + \hat{3}\hat{a}\hat{c}$.

- (4p) a)** Să se arate că polinomul f nu are rădăcini în \mathbf{Z}_5 .
- (4p) b)** Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbf{Z}_5[X]$.
- (4p) c)** Să se verifice că $[(\hat{a}X + \hat{b}) \circ (\hat{c}X + \hat{d})] \circ (\hat{u}X + \hat{v}) = (\hat{a}X + \hat{b}) \circ [(\hat{c}X + \hat{d}) \circ (\hat{u}X + \hat{v})]$, $\forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{u}, \hat{v} \in \mathbf{Z}_5$.
- (2p) d)** Să se arate că $(\hat{a}X + \hat{b}) \circ [(\hat{c}X + \hat{d}) + (\hat{u}X + \hat{v})] = [(\hat{a}X + \hat{b}) \circ (\hat{c}X + \hat{d})] + [(\hat{a}X + \hat{b}) \circ (\hat{u}X + \hat{v})]$, $\forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{u}, \hat{v} \in \mathbf{Z}_5$.
- (2p) e)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii K .
- (2p) f)** Să se arate că, dacă $\hat{a} \neq \hat{0}$ sau $\hat{b} \neq \hat{0}$, atunci elementul $\hat{a}X + \hat{b}$ este simetrizabil în raport cu legea "◦".
- (2p) g)** Să se arate că $\underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{de 25 de ori} = g$, $\forall g \in K$.

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru $a > 0$ se consideră sirurile $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^a}\right)^n$,

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^a}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+2)^a}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(2n)^a}\right), \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{(2n)^a}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

- (4p) a)** Să se arate că $a_n \leq b_n \leq c_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) b)** Să se arate că, dacă $a = 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$.
- (4p) c)** Să se arate că, dacă $a = 1$, atunci $\frac{1}{\sqrt{3}} < \lim_{n \rightarrow \infty} c_n < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- (2p) d)** Să se arate că, dacă $a = 1$, atunci sirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este constant.
- (2p) e)** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, pentru $a < 1$.
- (2p) f)** Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, pentru $a > 1$.
- (2p) g)** Să se arate că sirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent pentru orice $a > 0$.

Varianta 16

Subiectul I.

a) 3. b) $5\sqrt{2}$. c) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 50$. d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. e) 15. f) $a = -7, b = 22$.

Subiectul II.

- 1) a) Calcul direct. b) $\frac{1}{2}$. c) 1. d) $x=1$. e) -1.
 2) a) $2007 \cdot x^{2006}$. b) $\frac{2009}{2008}$. c) $f''(x) > 0$ pe $(0, \infty)$. d) 2007. e) $e - \cos 1$.

Subiectul III.

- a) $x^2 + \hat{2} = \hat{0} \Leftrightarrow x^2 = \hat{3}$, imposibil în \mathbf{Z}_5 pentru ca $x^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}\}$.
 b) f ireductibil pentru că nu are radacini în \mathbf{Z}_5 conform punctului a).
 c) Calcul direct. d) Calcul direct. e) 25 elemente.
 f) Elementul neutru față de "◦" este $e = \hat{0}x + \hat{1} \in K$;
 $(\hat{a}x + \hat{b})' = \hat{c}x + \hat{d}$, unde $\hat{c} = \hat{a} \cdot (\hat{3a} - \hat{b})^{-1}$; $\hat{d} = \hat{b} \cdot (\hat{b} - \hat{3a})^{-1}$.

Cum $\forall \alpha \in \mathbf{Z}_5^*$, α este inversabil, obținem că $\hat{3a} - \hat{b}$ este inversabil, deoarece
 $\hat{3a} - \hat{b} = \hat{0}$ implică $\hat{a} = \hat{b} = \hat{0}$.

g) (K^*, \circ) grup, unde $K^* = \{ \hat{a}x + \hat{b} \mid \hat{a}, \hat{b} \in \mathbf{Z}_5 \} \Rightarrow \text{ord } K^* = 24$. Se arată că dacă $g \in K$,

atunci $\underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{24 \text{ ori}} = \hat{1}$. Așadar $\underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{25 \text{ ori}} = g$.

Subiectul IV.

a) Înmultind inegalitățile: $\begin{cases} 1 - \frac{1}{n^a} < 1 - \frac{1}{(n+1)^a} < 1 - \frac{1}{(2n)^a} \\ \\ 1 - \frac{1}{n^a} < 1 - \frac{1}{(2n)^a} = 1 - \frac{1}{(2n)^a} \end{cases}$, obținem $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \geq 1$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$, pentru $a=1$ și cum $2 < e < 3$ rezultă $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{e}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

d) $a=1 \Rightarrow b_n = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

e) $a < 1 \Rightarrow a-1 < 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{a-1}}} = e^{-\infty} = 0$.

f) $a > 1 \Rightarrow a - 1 > 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = e^{-\frac{1}{2^a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{a-1}}} = e^0 = 1$.

g) Dacă $a > 1$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, iar dacă $a < 1$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Se aplică criteriul cleștelui inegalităților de la a), iar pentru $a=1$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$.