

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta015***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$
- (4p) b) Să se calculeze cosinusul unghiului format de vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2 + y^2 = 41$ dusă prin punctul $P(4,5)$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(-1, 2)$, $M(-2, 3)$ și $N(-3, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1, 1, 2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 1, 1)$ și $D(-1, -2, -3)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\cos \pi + i \sin \pi)^{16} = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $x^2 + 3x - 4 < 0$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{2}\hat{x}$.
- (3p) c) Să se calculeze partea întreagă a numărului $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor strict pozitive ecuația $\log_2 x = 3$.
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 + X^2 + 2$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4^x - 2^x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se determine ecuația asymptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) c) Să se arate că $f(x) \geq -\frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 13} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$.

- (4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) b) Dacă $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ și $Y = (3 \ 2 \ 1)$, să se calculeze matricea $S = A - X \cdot Y$.
- (4p) c) Să se verifice că $A^2 = 10A$.
- (2p) d) Să se arate că matricea B este inversabilă și inversa sa este matricea $B^{-1} = I_3 - \frac{1}{11}A$.
- (2p) e) Să se arate că $A^n = 10^{n-1}A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- (2p) f) Să se găsească trei matrice $U, V, W \in M_3(\mathbb{C})$ de rang 1, astfel încât $B = U + V + W$.
- (2p) g) Să se arate că oricare ar fi două matrice, $C, D \in M_3(\mathbb{C})$ de rang 1, avem $C + D \neq B$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f_0(x) = 1 - \cos x$ și

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $f_1(x) = x - \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (2p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots + (-1)^n \frac{x}{1!} + (-1)^{n+1} \sin x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (4p) d) Să se arate că graficul funcției f_1 nu are asimptotă spre $+\infty$.
- (2p) e) Să se arate că $0 \leq f_n(x) \leq 2 \cdot \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$. (Reamintim că $0!=1$)
- (2p) f) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x > 0$.
- (2p) g) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Varianta 15

Subiectul I.

- a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 12$
- b) $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{12}{13}$.
- c) Ecuația tangentei este $4x + 5y = 41$
- d) Verificare directă.
- e) $V_{ABCD} = \frac{5}{3}$.
- f) $a = 1$ și $b = 0$.

Subiectul II.

1.

- a) $x \in (-4, 1)$.
- b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{3}$.
- c) $\lfloor \sqrt{2} + \sqrt{3} \rfloor = 3$.
- d) $x = 8$.
- e) $x_1 + x_2 + x_3 = -1$.

2.

- a) $f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 - 2^x \cdot \ln 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- b) Dreapta $Ox: y = 0$ este asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției.
- c) $x = -1$ este punct de minim global pentru funcția f .

Rezultă că $f(x) \geq f(-1) = -\frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 6 \ln 2$.
- e) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 13} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{14}{13}$.

Subiectul III.

- a) $\det(A) = 0$ și $\text{rang}(A) = 1$.
- b) $S = A - X \cdot Y = O_3$.
- c) Se verifică prin calcul direct.

d) Cum $(I_3 + A) \cdot \left(I_3 - \frac{1}{11}A \right) = \left(I_3 - \frac{1}{11}A \right) \cdot (I_3 + A) = I_3$, deoarece inversa unei matrice este unică, rezultă că $B^{-1} = I_3 - \frac{1}{11}A$.

e) Se demonstrează prin inducție.

f) Matricele $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ au rangul 1 și

avem $B = U + V + W$.

g) Considerăm matricele $C, D \in M_3(\mathbb{C})$ de rang 1.

Cum $\text{rang}(C)=1$, toate liniile matricei C sunt proporționale. De asemenea, toate liniile matricei D sunt proporționale. Scriind elementele liniilor celor două matrice în funcție de factorii de proporționalitate și făcând calculele, obținem că $\det(C+D)=0$ și deoarece $\det(B) \neq 0$, avem $C+D \neq B$.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) $f_2(x) = \frac{x^2}{2!} + \cos x - 1$.

c) Se folosește primul principiu de inducție și se integrează de două ori egalitatea din ipoteza de inducție.

d) Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = +\infty$, graficul funcției f_1 nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Avem $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{x} = 1$, dar $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f_1(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x)$ nu există, deci graficul funcției f_1 nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

e) Se demonstrează prin inducție.

f) Se folosește criteriul raportului.

g) Considerăm $x \in \mathbb{R}$.

Pentru $x > 0$, din c) obținem:

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = (-1)^n \cdot f_{2n+1}(x) + \sin x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din e) obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, deci și $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot f_{2n+1}(x) = 0$

$$\text{și apoi } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sin x$$

Pentru $x = 0$, în relația din enunț se obține $0 = 0$, adevărat.

Pentru $x < 0$, deoarece funcțiile din enunț sunt impare, rezultă concluzia.