

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D*****Varianta ....014***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze  $\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2}$ .
- (4p) b) Să se determine partea reală a numărului complex  $z = \frac{1}{1+i}$ .
- (4p) c) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$  astfel încât punctele  $A(1, 1)$  și  $B(-1, 1)$  să aparțină dreptei  $y = ax + b$ .
- (4p) d) Să se calculeze lungimea înălțimii din  $A$  a triunghiului  $ABC$  având laturile  $AB = 6$ ,  $BC = 10$ ,  $AC = 8$ .
- (2p) e) Să se determine ecuația tangentei la cercul  $x^2 + y^2 = 4$  în punctul  $A(0, 2)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  știind că punctele  $A(2, 2, a)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$  și  $D(1, 1, 2)$  sunt coplanare.

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația  $2\ln^2 x - 3\ln x + 1 = 0$ .
- (3p) b) Să se calculeze suma  $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 31$ .
- (3p) c) Să se calculeze numărul submulțimilor mulțimii  $A = \{a, b, c, d\}$ .
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca o cifră din primele 7 zecimale ale numărului  $\frac{1}{7}$ , să fie 1.
- (3p) e) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $6x^3 - 5x^2 - 1 = 0$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ .
- (3p) a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției  $f'$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x = 0$  și  $x = 1$ .

**SUBIECTUL III (20p)**

Se consideră mulțimea  $M$  formată din toate polinoamele cu coeficienții din mulțimea  $\{-1, +1\}$  și cu toate rădăcinile reale.

- (4p) a) Să se arate că  $X - 1 \in M$ .
- (4p) b) Să se arate că  $X^2 + X + 1 \notin M$ .
- (4p) c) Să se arate că  $\left(y_1 \cdot t - \frac{1}{y_1}\right)^2 + \left(y_2 \cdot t - \frac{1}{y_2}\right)^2 + \dots + \left(y_n \cdot t - \frac{1}{y_n}\right)^2 \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  
 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\forall y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbf{R}^*$ .
- (2p) d) Să se arate că  $(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \left(\frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{y_2^2} + \dots + \frac{1}{y_n^2}\right) \geq n^2$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  
 $\forall y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbf{R}^*$ .
- (2p) e) Dacă  $f \in M$  are rădăcinile  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n \geq 2$ , să se arate că  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 3$ .
- (2p) f) Să se arate că orice polinom din mulțimea  $M$  are gradul mai mic sau egal decât 3.
- (2p) g) Să se determine toate polinoamele din mulțimea  $M$ .

**SUBIECTUL IV (20p)**

Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definite prin  $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{3} \cos x$ ,

$g(x) = x - f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$  și  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sirul definit prin  $x_0 \in \mathbf{R}$ , arbitrar și  
 $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că  $|f'(x)| \leq \frac{5}{6}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{5}{6}|x - y|$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se arate că funcția  $g$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) e) Să se arate că există un unic  $u \in \mathbf{R}$  astfel încât  $g(u) = 0$ .
- (2p) f) Să se demonstreze că  $|x_{n+1} - u| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \cdot |x_0 - u|$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$ .

**Varianta 014****Subiectul I**

- a) -1. b)  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ ; c)  $a=0, b=1$ . d)  $\frac{24}{5}$ ; e)  $y=2$ . f)  $a = 8$ .

**Subiectul II**

1. a)  $S=\{\sqrt{e}, e\}$ . b) 256. c) 16. d)  $\frac{2}{7}$ ; e)  $x=1$  este singura rădăcină reală.
2. a)  $\infty$ . b)  $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ . c)  $f'(x)\geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ . d)  $f'(1)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ . e)  $\sqrt{2}$ .

**Subiectul III**

a) Evident.

b)  $x_{1,2} \notin \mathbf{R}$ .

c) Evident, sumă de pătrate de numere reale.

d) Din relația de la c) obținem

$$(y_1^2 + \dots + y_n^2)t^2 - 2nt + \frac{1}{y_1^2} + \dots + \frac{1}{y_n^2} \geq 0, \forall t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \Delta = 4n^2 - 4(y_1^2 + \dots + y_n^2)(\frac{1}{y_1^2} + \dots + \frac{1}{y_n^2}) \leq 0, \text{ de}$$

unde rezultă relația cerută.

e) Din relațiile lui Viète obținem  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \pm 1$

$$S = x_1^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + \dots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n) = 1 - 2(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

Dacă  $(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n) = 1 \Rightarrow S = -1$ , deci nu toate rădăcinile sunt reale, ceea ce contrazice ipoteza.

Așadar  $(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n) = -1$ . Rezultă că  $S=3$ .

f) Se presupune că  $f \in M$ , grad  $f = n$  și fie  $x_1, \dots, x_n$  rădăcinile lui  $f$ . Avem conform punctului c)

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 3 \text{ și analog se arată că } \frac{1}{x_1^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = 3, \text{ de unde aplicând inegalitatea de la punctul e)}$$

obținem  $9 \geq n^2$ , deci  $n \leq 3$ .

g) Polinoamele de gradul I sunt  $x+1, -x-1, -x+1, x-1$ .

Polinoamele de gradul II sunt  $x^2 - x - 1$  și  $-x^2 + x + 1, x^2 + x - 1, -x^2 - x + 1$

Polinoamele de gradul III sunt  $x^3 - x^2 - x + 1, x^3 + x^2 - x - 1, -x^3 + x^2 + x - 1, -x^3 - x^2 + x + 1$

**Subiectul IV**

a)  $f'(x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{3}\sin x$ .

b)  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}|\cos x| + \frac{1}{3}|\sin x| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq \frac{5}{6}, \forall x \in \mathbf{R}$ .

c) Aplicând teorema lui Lagrange funcției  $f$  pe intervalul  $[x, y]$ , rezultă că există  $c \in (x, y)$  astfel încât  $f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y)$ . Folosind b) rezultă inegalitatea cerută.

d)  $g'(x) = 1 - f'(x), \forall x \in \mathbf{R}$ . Folosind b) rezultă că  $g'(x) \geq \frac{1}{6} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ .

e) Din d)  $\Rightarrow g$  injectiva. Im  $g = \mathbf{R}$  pentru ca  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

Deci,  $g$  este bijectiva. Așadar pentru  $y=0$ , există un unic  $u \in \mathbf{R}$  astfel încât  $g(u)=0$

f) Avem:  $|x_n - u| = |f(x_{n-1}) - f(u)| \leq \frac{5}{6}|x_{n-1} - u|, \forall n \geq 1$ . Aplicând succesiv această relație obținem

$$|x_{n+1} - u| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} |x_0 - u|$$

g) Cum  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} |x_0 - u| = 0$ , obținem  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - u| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} = u$ .