

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D*****Varianta ....012***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\frac{4+5i}{5+4i}$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $D(2,3)$  la dreapta  $x+y+5=0$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la parabola  $y^2 = 3x$  dusă prin punctul  $P(3,3)$ .
- (4p) d) Să se arate că punctele  $L(1, 2, 2)$ ,  $M(2, 3, 2)$  și  $N(3, 4, 2)$  sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 2, 1)$ ,  $C(2, 1, 3)$  și  $D(-1, -2, -3)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe  $(2-3i)^3 = a + bi$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Să se demonstreze că  $n!n = (n+1)!-n!$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (3p) b) Să se arate că  $1!1 + 2!2 + \dots + 100!100 = 101!-1$ .
- (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$  să verifice relația  $\hat{x}^3 = \hat{x}$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x + 4^x = 6$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor complexe ale polinomului  $f = X^4 - X^2 - 24$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2^x + 5^x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ .
- (3p) e) Să se determine asimptota orizontală spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (4p) a) Să se calculeze matricele  $C + D$  și  $(C + D)^2$ .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei  $C$ .
- (4p) c) Să se arate că  $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B))$ ,  $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$ .
- (2p) d) Să se arate că, dacă  $x, y, a, b \in \mathbf{R}$  și  $x + y = 2(a + b)$ , atunci  $x \leq a + b$  sau  $y \leq a + b$ .
- (2p) e) Să se arate că  $\forall A, B \in M_2(\mathbf{R})$ , avem  $\det(A + B) \leq \det(A) + \det(B)$  sau  $\det(A - B) \leq \det(A) + \det(B)$ .
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $\forall n \in \mathbf{N}^*$  și  $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in M_2(\mathbf{R})$ , există o alegere a semnelor + sau - astfel încât  $\det(A_1 \pm A_2 \pm \dots \pm A_n) \leq \det(A_1) + \det(A_2) + \dots + \det(A_n)$ .
- (2p) g) Să se arate că există o alegere a semnelor + sau - astfel încât să avem  $(\cos 1 \pm \cos 2 \pm \dots \pm \cos 10)^2 + (\sin 1 \pm \sin 2 \pm \dots \pm \sin 10)^2 \leq 10$

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$  și sirurile  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$  și  $(c_n)_{n \geq 1}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}, \quad b_n = a_n - f(n), \quad c_n = a_n - f(n+1), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Să se arate că funcția  $f'$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(0, \infty)$ .
- (2p) c) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că  $\forall k > 0$ , există  $c \in (k, k+1)$ , astfel încât  $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[4]{c}}$ .
- (2p) d) Să se arate că  $\frac{1}{\sqrt[4]{k+1}} < \frac{4}{3}(k+1)^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}k^{\frac{3}{4}} < \frac{1}{\sqrt[4]{k}}$ ,  $\forall k \in (0, \infty)$ .
- (2p) e) Să se arate că sirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător iar sirul  $(c_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător.
- (2p) f) Să se arate că sirurile  $(b_n)_{n \geq 1}$  și  $(c_n)_{n \geq 1}$  sunt convergente.
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

- (2p) h) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{2n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$

**Varianta 012****Subiectul I.**

- a)  $\left| \frac{4+5i}{5+4i} \right| = 1$
- b) Distanța căutată este  $5\sqrt{2}$
- c) Ecuația tangentei este:  $x - 2y + 3 = 0$
- d) Punctele  $L, M, N$  sunt coliniare, deoarece  $\overrightarrow{LN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$ .
- e)  $V_{ABCD} = 4$ .
- f)  $a = -46$  și  $b = -9$ .

**Subiectul II.****1.**

- a) Calcul direct
- b) Se folosește punctul a).
- c) Probabilitatea căutată este  $p = 1$ .
- d)  $x = 1$ .
- e)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ .

**2.**

- a)  $f'(x) = 2^x \ln 2 + 5^x \ln 5$ , pentru  $x \in \mathbb{R}$ .
- b)  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 5}$ .
- c)  $f''(x) > 0$ , pentru  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \ln 2 + 5 \ln 5$ .
- e) Dreapta  $Ox : y = 0$  este asimptotă orizontală spre  $-\infty$  la graficul funcției.

**Subiectul III.**

- a)  $C + D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $(C + D)^2 = I_2$ .
- b)  $\det(C) = 0$ , rang  $(C) = 1$ .
- c) Calcul direct.
- d) Se demonstrează prin reducere la absurd.
- e) Punând în afirmația de la c)  $x = \det(A + B)$ ,  $y = \det(A - B)$ ,  $a = \det(A)$  și  $b = \det(B)$  și folosind d), obținem concluzia.
- f) Demonstrația este imediată, folosind primul principiu de inducție și punctul e).

g) Alegem matricele  $A_k = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix}$ , unde  $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ .

Avem  $\det(A_k) = 1, \forall k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ .

Din f) rezultă că există cel puțin o alegere a semnelor pentru care avem:  
 $\det(A_1 \pm A_2 \pm \dots \pm A_{10}) \leq \det(A_1) + \det(A_2) + \dots + \det(A_{10}) = 10$ , de unde obținem concluzia.

#### Subiectul IV.

a)  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ , pentru  $x \in (0, \infty)$ .

b)  $f''(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$ , deci  $f'$  este strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$ .

c) Pentru  $k > 0$ , aplicând teorema lui Lagrange funcției  $f$  pe intervalul  $[k, k+1]$ ,

deducem că există  $c \in (k, k+1)$  astfel încât  $f(k+1) - f(k) = f'(c) = \frac{1}{\sqrt[4]{c}}$ .

d) Deoarece  $f'$  este strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$ , avem:  $k < c < k+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(k+1) < f'(c) < f'(k) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{k+1}} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{\sqrt[4]{k}}, \forall k > 0.$$

e) Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_{n+1} - b_n \stackrel{\text{d)}{<} 0$ , deci sirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător și  $c_{n+1} - c_n \stackrel{\text{d)}{>} 0$ , deci sirul  $(c_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător.

f) Deoarece  $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$ , obținem că  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ , de unde rezultă că  $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n < b_n$ .

Folosind monotonia celor două siruri, deducem  $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_1 < b_n$  și  $c_n < b_1$ .

Sirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  este strict descrescător și mărginit inferior, deci este convergent.

Sirul  $(c_n)_{n \geq 1}$  este strict crescător și mărginit superior, deci este convergent.

g) Deoarece sirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  e convergent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + f(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( b_n + \frac{4}{3} \cdot n^{\frac{3}{4}} \right) = +\infty$ .

h)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{2n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n} - a_n}{\sqrt[4]{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n} - b_n + (f(2n) - f(n))}{\sqrt[4]{n^3}} = \\ = \frac{4}{3} \cdot (\sqrt[4]{8} - 1).$$