

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D*****Varianta ....011***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete****SUBIECTUL I ( 20p )**

În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,3)$ ,  $B(2,4)$ ,  $C(3,5)$  și  $O(0,0)$ .

- (4p) a) Să se calculeze lungimile segmentelor  $(AB)$ ,  $(BC)$  și  $(AC)$ .
- (4p) b) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$  astfel încât punctele  $A(1,3)$  și  $B(2,4)$  să se afle pe dreapta  $y = ax + b$ .
- (4p) c) Să se demonstreze că punctele  $A(1,3)$ ,  $B(2,4)$ ,  $C(3,5)$  sunt coliniare.
- (4p) d) Să se calculeze coordonatele proiecției punctului  $A(1,3)$  pe axa  $Ox$ .
- (2p) e) Dacă  $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  și  $\sin a = \frac{5}{13}$ , să se calculeze  $\cos a$ .
- (2p) f) Să se calculeze în mulțimea numerelor complexe produsul  $i \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^{10}$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Să se rezolve în  $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$  ecuația:  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\log_2 8$ .
- (3p) c) Să se determine cu câte cifre de 0 se termină numărul  $10!$ .
- (3p) d) Să se calculeze suma  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element  $n$  din mulțimea  $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , acesta să satisfacă relația  $n^2 - 4 \leq 0$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 4x + 4$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ .
- (3p) c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \int_0^n f(x) dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Pentru  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , se consideră funcția  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $f(z) = (1+z)^n$ .

Sunt cunoscute formulele  $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$  și  $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ ,  $\forall a \in \mathbf{R}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f(1)$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f(i) = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots)$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ .
- (2p) d) Să se arate că  $f(i) = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$ .
- (2p) e) Să se arate că  $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$ .
- (2p) f) Să se arate că  $f(\cos t + i \sin t) = 2^n \cos^n \frac{t}{2} \left( \cos \frac{nt}{2} + i \sin \frac{nt}{2} \right)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\sum_{k=0}^n C_n^k \cos kt = 2^n \cos^n \frac{t}{2} \cos \frac{nt}{2}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră sirul  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $e_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ , unde  $0! = 1$  și pentru orice sir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$a_n \in \{-1, 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definim sirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  prin  $x_n = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \dots + \frac{a_n}{n!}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

- (4p) a) Să se arate că:  $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-2)!k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ .
- (4p) b) Să se arate că  $\frac{1}{0!2} + \frac{1}{1!3} + \dots + \frac{1}{(n-2)!n} = 1 - \frac{1}{n!}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- (4p) c) Să se arate că sirul  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este monoton și mărginit.
- (2p) d) Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , numărul  $x_n$  nu este număr întreg.
- (2p) e) Să se arate că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , există  $y_n, z_n \in [0, \infty)$ , astfel încât  $x_n = y_n - z_n$ .
- (2p) f) Să se arate că sirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent.
- (2p) g) Să se arate că limita sirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este număr irațional.

**Varianta 011****Subiectul I**

- a)  $AB=BC=\sqrt{2}$ ;  $AC=2\sqrt{2}$ ; b)  $a=1$ ,  $b=2$ ; c)  $m_{AB} = m_{AC}$ ; d)  $(1,0)$ ; e)  $\cos a = \frac{12}{13}$ ; f)  $-i$ ;

**Subiectul II**

1. a)  $x=2$ ; b)  $3$ ; c) 2 cifre de 0; d)  $2^{10} - 1$ ; e)  $\frac{5}{7}$ ;
2. a)  $2x+4$ ; b)  $f'(2) = 8$ ; c) f descrescătoare pe  $(-\infty, -2)$  și crescătoare pe  $[-2, \infty]$ ;  
d)  $\frac{19}{3}$ ; e)  $\frac{1}{3}$ ;

**Subiectul III**

a)  $f(1)=2^n$ ;

b) Se aplică binomul lui Newton și se ține cont de puterile lui i;

c) Calcul direct;

d)  $f(i)=(1+i)^n = \left[ \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \right]^n = 2^{\frac{n}{2}} (\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4})$ ;

e) Din b) și d) identificând părțile reale din expresia lui  $f(i)$  se obține relația cerută

$$f(\cos t + i \sin t) = (1 + \cos t + i \sin t)^n = \left( 2 \cos^2 \frac{t}{2} + 2i \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right)^n =$$

$$= \left( 2 \cos \frac{t}{2} \left( \cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \right) \right)^n = 2^n \cos^n \frac{t}{2} \left( \cos \frac{nt}{2} + i \sin \frac{nt}{2} \right)$$

g)  $f(\cos t + i \sin t) = (1 + (\cos t + i \sin t))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos t + i \sin t)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos kt + i \sum_{k=0}^n C_n^k \sin kt$  și  
ținând seama de f) rezultă relația data.

**Subiectul IV**

a)  $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-2)!k} \Leftrightarrow \frac{1}{k-1} \leq 1$ , evident pentru  $k \geq 2$ ;

b)  $\frac{1}{(k-2)!k} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$ ,  $\forall k \geq 2$ . Adunând aceste egalități pentru  $k = \overline{2, n}$  obținem concluzia;

c)  $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ . Folosind a) și b) obținem

$$2 < e_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{0!2} + \frac{1}{1!3} + \dots + \frac{1}{(n-2)!n} = 3 - \frac{1}{n!} < 3, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

d) Din  $(n-1)! x_n = (a_0 + \frac{a_1}{1!} + \dots + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!})(n-1)! + \frac{a_n}{n}$ ,  $n \geq 2 \Rightarrow x_n \notin \mathbf{Z}$ ;

e) Se separă termenii cu semnul plus respective cu semnul minus din sirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  obținând  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , respectiv  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ;

f) Sirurile  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la punctul e) sunt strict crescătoare și mărginite, deci convergente.

g) Dacă prin absurd  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , pentru  $n > q + 1$  avem  $x_n = \sum_{k=0}^q \frac{a_k}{k!} + \sum_{k=q+1}^n \frac{a_k}{k!}$  în care

înmultim cu  $q!$  și obținem:  $q!x_n = B + q! \sum_{k=q+1}^n \frac{a_k}{k!}$ . Trecand la limita pentru  $n \rightarrow \infty$  rezulta

$$q! \frac{p}{q} = B + \lim_{n \rightarrow \infty} q! \sum_{k=q+1}^n \frac{a_k}{k!}. \text{ Din } B \in \mathbb{Z} \text{ rezulta } \lim_{n \rightarrow \infty} q! \sum_{k=q+1}^n \frac{a_k}{k!} \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Din } \left| q! \sum_{k=q+1}^n \frac{a_k}{k!} \right| \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1)(q+2)\dots n} \leq \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+2}} = \frac{q+2}{(q+1)^2} \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{Pe de alta parte } \left| q! \sum_{k=q+1}^n \frac{a_k}{k!} \right| \geq \left| \frac{1}{q+1} - \sum_{k=q+2}^n \frac{q!}{k!} \right| > \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q(q+1)} > 0,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} q! \sum_{k=q+1}^n \frac{a_k}{k!} \notin \mathbb{Z}$ , contradictie.