

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D****Varianta010**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului $2\vec{i} + 5\vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(6, 7)$ și $C(7, 6)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3}$.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(6, 7)$ și $C(7, 6)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(6, 7)$, $B(5, 5)$ și $C(7, 6)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{3+i}{4-i} = a+bi.$$

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze elementul $\hat{6}^{2007}$ în \mathbf{Z}_7 .
- (3p) b) Să se calculeze expresia $C_9^4 - C_9^5$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 8^x = 10$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n > n^3$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x + x + 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n} + 5}{2\sqrt{n} + 7}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbf{R})$, $B = A^T \cdot A$, $C = A \cdot A^T$,

astfel încât $\text{rang}(A) = 2$ și vectorii $\vec{v}_k = a_k \vec{i} + b_k \vec{j}$, $\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$

(A^T este transpusa matricei A).

Se admite cunoscut că $\text{rang}(X \cdot Y) \leq \min(\text{rang}(X), \text{rang}(Y))$, $\forall X \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $\forall Y \in M_{n,p}(\mathbf{R})$, $m, n, p \in \mathbf{N}^*$.

- (4p)** a) Să se arate că există $n, r \in \{1, 2, 3, 4\}$, astfel încât $\det \begin{pmatrix} a_n & a_r \\ b_n & b_r \end{pmatrix} \neq 0$.

- (4p)** b) Să se arate că elementele matricei B sunt $b_{nr} = \vec{v}_n \cdot \vec{v}_r$, cu $n, r \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- (4p)** c) Să se arate că $\text{rang}(B) \leq 2$.

- (2p)** d) Să se arate că $\det(B) = 0$.

- (2p)** e) Să se arate că dacă cei 4 vectori sunt nenuli și distincți, atunci există 2 dintre ei \vec{v}_n, \vec{v}_r , cu $n, r \in \{1, 2, 3, 4\}$, care fac între ei un unghi de cel mult 90° .

- (2p)** f) Să se arate că matricea B conține cel puțin 6 elemente nenegative.

- (2p)** g) Să se arate că

$$\det C = \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{array} \right|^2.$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f_a(x) = (x+a) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ și sirul $(e_n(a))_{n \geq 1}$,

$e_n(a) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+a}$, unde $a \in [0, 1]$, $n \geq 1$.

- (4p)** a) Să se arate că $f'_a(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{x+a}{x(x+1)}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

- (4p)** b) Să se arate că $f''_a(x) = \frac{(2a-1)x+a}{x^2(x+1)^2}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

- (4p)** c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(a)$.

- (2p)** d) Să se arate că sirul $(e_n(0))_{n \geq 1}$ este strict crescător.

- (2p)** e) Să se determine ecuația asymptotei către $+\infty$ la graficul funcției f_a .

- (2p)** f) Să se arate că sirurile $\left(e_n \left(\frac{1}{2} \right) \right)_{n \geq 1}$ și $(e_n(1))_{n \geq 1}$ sunt strict descrescătoare.

- (2p)** g) Să se determine cel mai mic număr $a \in [0, 1]$ pentru care $(e_n(a))_{n \geq 1}$ este sir descrescător.

Varianta 10

Subiectul I

a) $\sqrt{29}$. b) $AC = \sqrt{2}$. c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. d) $\begin{cases} a=1 \\ b=-13 \end{cases}$. e) $S_{ABC} = \frac{3}{2}$. f) $a = \frac{11}{17}, b = \frac{7}{17}$.

Subiectul II

1. a) $\hat{6}^{2007} = \hat{6}$. b) $C_9^4 - C_9^5 = 0$. c) $x^2 = t, t^2 - 3t + 2 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$.

$x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm \sqrt{2}$.

d) Unica solutie reala este $x = 1$. e) Probabilitatea ceruta este $\frac{4}{5}$.

2. a) $f'(x) = e^x + 1$. b) $\int_0^1 f(x)dx = e + \frac{1}{2}$. c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2$.

d) $f''(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ convexă pe \mathbf{R} . e) $\frac{3}{2}$.

Subiectul III

a) $\text{rang } A = 2 \Rightarrow \exists n, r \in \{1, 2, 3, 4\}$ astfel ca $\det \begin{pmatrix} a_n & a_r \\ b_n & b_r \end{pmatrix} \neq 0$.

b) $B = A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & \dots & a_1 a_4 + b_1 b_4 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_4 a_1 + b_4 b_1 & \dots & a_4^2 + b_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_4 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_4 \end{pmatrix}$.

c) $\text{rang } B \leq \min\{\text{rang } A^T, \text{rang } A\} = 2$.

d) Deoarece $\text{rang } B \leq 2$ și $B \in M_4(R) \Rightarrow \det B = 0$.

e) Considerăm vectorii $\vec{v}_n, 1 \leq n \leq 4$, cu originea în $O(0,0)$. Cum suma unghiurilor în jurul lui O este 360° rezultă că cel puțin unul din unghiurile formate de doi vectori alăturați este cel mult 90° .

f) Evident $b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44} \geq 0$ și cum mai există 2 vectori $\vec{v}_n, \vec{v}_r, n \neq r$, care au unghiul dintre ei de cel mult 90° rezultă că $b_{nr} = b_{rn} = \vec{v}_n \cdot \vec{v}_r = |\vec{v}_n| \cdot |\vec{v}_r| \cdot \cos \alpha \geq 0$. Deci matricea B are cel putin 6 elemente nenegative.

g) Calcul direct.

Subiectul IV

a) Calcul direct. b) Calcul direct. c) $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \frac{n+a}{n} = e$.

d) Să observăm că are loc relația: $e_n(a) = e^{f_a(n)}, n \in \mathbf{N}^*$, deci, $e_n(0) = e^{f_o(n)}$.

Cum $f''(x) = -\frac{x}{x^2(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$, rezultă că f'_0 este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$, deci $f'_0(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} f'_0(x) = 0, \forall x > 0$, deci f_0 este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, deci $(e_n(0))_{n \geq 0}$ este strict crescător.

e) Din $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+a} = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală.

f) Arătăm că $f_{\frac{1}{2}}$ și f_1 sunt funcții strict descrescătoare pe $(0, \infty)$. Avem

$$f_{\frac{1}{2}}''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0, \forall a \in (0, \infty) \Rightarrow f_{\frac{1}{2}}' \text{ este strict crescătoare pe } (0, \infty), \text{ deci}$$

$f_{\frac{1}{2}}'(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} f_{\frac{1}{2}}'(x) = 0, \forall x > 0 \Rightarrow f_{\frac{1}{2}} \text{ este strict descrescătoare pe } (0, \infty)$. Analog se arată că f_1 este strict descrescătoare.

g) Arătăm că $a = \frac{1}{2}$ este numărul căutat. Dacă $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ rezultă că ecuația $f_a''(x) = 0$

admete rădăcina $x_0 = \frac{a}{1-2a} > 0$. Înând seama de semnul lui f_a'' rezultă că f_a' este descrescătoare pe $[x_0, \infty)$ $\Rightarrow f_a'(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} f_a'(x) = 0, \forall x \in [x_0, \infty)$, deci f_a este crescătoare pe $[x_0, \infty)$. Prin urmare sirul $(e_n(a))_{n \geq x_0}$ este strict crescător dacă $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Deci $a = \frac{1}{2}$ este numarul cautat.