

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007****Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D*****Varianta ....009***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $(2+3i)^2$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul  $E(1, 2)$  la dreapta  $x+y+5=0$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la hiperbola  $x^2 - 2y^2 = 2$  în punctul  $P(2,1)$ .
- (4p) d) Să se arate că punctele  $L(-1, 2, 1)$ ,  $M(-2, 3, 1)$  și  $N(-3, 4, 1)$  sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(2, 2, 1)$ ,  $C(2, 1, 2)$  și  $D(1, 2, 3)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe
- $$(3+2i)^3 = a + bi$$

**SUBIECTUL II ( 30p )****1.**

- (3p) a) Să se calculeze expresia  $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $x^2 - x = 6$ .
- (3p) c) Dacă funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 1$ , are inversa  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , să se calculeze  $g(2) + g(1) + g(0)$ .
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația  $3^x + 9^x = 12$ .
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului  $f = X^3 - X^2 - X - 1$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se determine ecuația asimptotei către  $\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $M_2(\mathbf{Z}_2)$ , submulțimea  $H = \{X \in M_2(\mathbf{Z}_2) \mid X^2 = X\}$  și matricele

$$O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \text{ și } I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $O_2 \in H$  și  $I_2 \in H$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $B \notin H$ .
- (4p) c) Să se găsească două matrice  $P, Q \in H$ , cu proprietatea  $P + Q \notin H$ .
- (2p) d) Să se arate că, dacă  $U \in H$  este o matrice inversabilă, atunci  $U = I_2$ .
- (2p) e) Să se determine numărul de elemente din mulțimea  $M_2(\mathbf{Z}_2)$ .
- (2p) f) Să se determine numărul de elemente din mulțimea  $H$ .
- (2p) g) Să se arate că orice matrice din mulțimea  $M_2(\mathbf{Z}_2)$  se scrie ca o sumă finită de elemente din mulțimea  $H$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , funcțiile  $f_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}$  și  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$\text{definite prin } g(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \text{ și } f_0(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-n-1},$$

$$\forall x \in [0, \infty) \text{ și } f_{k+1}(x) = \int_0^x f_k(t) dt, \quad \forall x \in [0, \infty), \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Notăm prin  $g^{(k)}(x)$ , derivata de ordinul  $k$  a funcției  $g$  calculată în punctul  $x$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $g'(x)$ ,  $x \in [0, \infty)$ .
  - (2p) b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că,
- $$g^{(k)}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - k + 1 \right) (1+x)^{\frac{1}{2}-k}, \quad \forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in [0, \infty).$$
- (4p) c) Să se verifice că  $g^{(n+1)}(t) = f_0(t)$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ .
  - (4p) d) Integrând relația de la punctul c), să se arate că  $f_1(x) = g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)$ ,  $\forall x \in [0, \infty)$ .
  - (2p) e) Să se demonstreze că  $\forall x \in [0, \infty)$  avem egalitatea
- $$f_{n+1}(x) = g(x) - \left( g(0) + \frac{x}{1!} g^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} g^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) \right).$$
- (2p) f) Să se arate că  $0 \leq |f_k(x)| \leq \frac{x^k}{k!} \left| \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n \right) \right|$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}$ ,  $\forall x \in (0, 1]$ .
  - (2p) g) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( g(0) + \frac{x}{1!} g^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} g^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) \right) = g(x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

## Varianta 9

**Subiectul I.**

- a)  $\left| (2+3i)^2 \right| = 13$ .
- b)  $4\sqrt{2}$ .
- c) Ecuația tangentei este:  $x - y - 1 = 0$
- d) Punctele  $L, M, N$  sunt coliniare, deoarece  $\overrightarrow{LN} = 2 \cdot \overrightarrow{LM}$ .
- e)  $V_{ABCD} = \frac{1}{6}$ .
- f)  $a = -9$  și  $b = 46$

**Subiectul II.**

1.

- a) 16.
- b) Probabilitatea căutată este  $\frac{1}{5}$ .
- c)  $g(2) + g(1) + g(0) = 0$ .
- d)  $x = 1$ .
- e)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$ .

2.

- a)  $f'(x) = \frac{2+x^2}{1+x^2}$ .
- b) Asimptota către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$  este dreapta  $y = x + \frac{\pi}{2}$ .
- c)  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$ .
- e)  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi + 2 - 2 \ln 2}{4}$ .

**Subiectul III.**

- a) Calcul direct.
- b) Calcul direct
- c) De exemplu,  $P = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in H$ ,  $Q = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$  și  $P + Q = B \notin H$ .

**d)** Dacă  $U = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \in H$  este o matrice inversabilă, atunci  $\det(U) = \hat{1}$ .

$\det(U) = \hat{1} \Leftrightarrow \hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c} = \hat{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{a}\hat{d} = \hat{1} \\ \hat{b}\hat{c} = \hat{0} \end{cases}$  sau  $\begin{cases} \hat{a}\hat{d} = \hat{0} \\ \hat{b}\hat{c} = \hat{1} \end{cases}$ , de unde obținem că  $U = I_2$ .

**e)** Numărul elementelor mulțimii  $M_2(\mathbf{Z}_2)$  este egal cu 16.

**f)** Obținem:  $H = \left\{ O_2, I_2, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix} \right\}$ ,

deci  $H$  are 8 elemente.

**g)** Dacă  $U = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \in H$ , putem scrie:

$$U = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a} - \hat{c} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{d} - \hat{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{c} & \hat{0} \\ \hat{c} & \hat{0} \end{pmatrix},$$

$$\text{iar } \begin{pmatrix} \hat{a} - \hat{c} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \in \left\{ O_2, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \right\} \subset H, \quad \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{b} \end{pmatrix} \in \left\{ O_2, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \right\} \subset H$$

$$\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{d} - \hat{b} \end{pmatrix} \in \left\{ O_2, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \right\} \subset H, \quad \begin{pmatrix} \hat{c} & \hat{0} \\ \hat{c} & \hat{0} \end{pmatrix} \in \left\{ O_2, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix} \right\} \subset H.$$

#### Subiectul IV.

**a)**  $g'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ , pentru  $x \in [0, \infty)$ .

**b)** Considerăm  $x \in [0, \infty)$ .

Pentru orice  $k \in \mathbf{N}^*$ , notăm  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right) = a_k$

Se folosește primul principiu de inducție și faptul că

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \quad g^{(m+1)}(x) = (g^{(m)}(x))'.$$

**c)** Pentru  $k = n+1$ , din **b)** obținem  $g^{(n+1)}(t) = a_{n+1}(1+t)^{\frac{1}{2}-(n+1)} = f_0(t)$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ .

**d)** Din **c)** obținem  $f_1(x) = \int_0^x f_0(t) dt = \int_0^x g^{(n+1)}(t) dt = g^{(n)}(t) \Big|_0^x = g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)$ ,

pentru orice  $x \in [0, \infty)$ .

**e)** Considerăm  $x \in [0, \infty)$ .

Din **d)** deducem că  $\forall t \in [0, \infty)$ ,  $f_1(t) = g^{(n)}(t) - g^{(n)}(0)$  și integrând succesiv,

după un număr finit de pași obținem:

$$\forall t \in [0, \infty), \quad f_0(t) = g^{(n+1)}(t)$$

$$f_1(t) = g^{(n)}(t) - g^{(n)}(0)$$

$$f_2(t) = g^{(n-1)}(t) - g^{(n-1)}(0) - g^{(n)}(0) \cdot t$$

$$f_n(t) = g'(t) - g'(0) - g^{(2)}(0) \cdot \frac{t}{1!} - g^{(3)}(0) \cdot \frac{t^2}{2!} - \dots - g^{(n)}(0) \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

și integrând pe  $[0, x]$  egalitatea precedentă, rezultă

$$f_{n+1}(x) = g(x) - g(0) - g^{(1)}(0) \cdot \frac{x}{1!} - g^{(2)}(0) \cdot \frac{x^2}{2!} - \dots - g^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

**f)** Se demonstrează prin inducție.

**g)** Dacă  $x = 0$ , atunci  $g(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(0)$ , deci este adevărată concluzia.

Considerăm  $x \in (0, 1]$ .

$$\text{Din e) obținem } g(0) + g^{(1)}(0) \cdot \frac{x}{1!} + g^{(2)}(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + g^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!} = g(x) - f_{n+1}(x) \quad (1)$$

$$\text{Din f), avem } |f_{n+1}(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot |a_{n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$\text{Notăm } b_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n+2)}.$$

Se arată că  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  și din (2) rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(x) = 0$ , pentru orice  $x \in (0, 1]$ ,

$$\text{iar din (1) rezultă } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( g(0) + g^{(1)}(0) \cdot \frac{x}{1!} + g^{(2)}(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + g^{(n)}(0) \cdot \frac{x^n}{n!} \right) = g(x).$$