

Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ****PROBA D*****Varianta008***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex i^{2007} .
- (4p) b) Să se determine inversul numărului complex i^{2007} .
- (4p) c) Să se determine semnul numărului $\sin \frac{\pi}{2007} - \cos \frac{\pi}{2007}$.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC , dacă $AB = 6$, $BC = 10$ și măsura unghiului B este de 45° .
- (2p) e) Să se determine ecuația cercului cu centru în punctul $M(1, -1)$ și raza 2.
- (2p) f) Să se determine distanța de la punctul $A(1, 1, -1)$ la planul de ecuație $3x + 2y - z = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine coordonatele vârfului parabolei de ecuație $y = x^2 - 2x + 5$.
- (3p) b) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii A dacă aceasta are exact 8 submulțimi.
- (3p) c) Să se determine numărul real x dacă numerele 2 ; x și $x+4$ (în această ordine) sunt în progresie aritmetică.
- (3p) d) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = 2X^3 - 6X^2 + 8X + 1$.
- (3p) e) Să se calculeze $\hat{4}^{2007}$ în \mathbf{Z}_5 .

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

- (3p) a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(1, \infty)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f^3(x) dx$

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

Varianta 008

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = 10X^{10} + 9X^9 + \dots + 2X^2 + X + 0,5$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_{10} \in \mathbf{C}$ și $g = (X - 1) \cdot f$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (4p) b) Să se calculeze $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{10}$ și $x_1 + x_2 + \dots + x_{10}$.
- (4p) c) Să se verifice că $g = 10X^{11} - X^{10} - \dots - X^2 - 0,5X - 0,5$.

- (2p) d) Să se arate că, dacă $z \in \mathbf{C}$ și $g(z) = 0$, atunci $10 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^9} + \frac{0,5}{z^{10}} + \frac{0,5}{z^{11}}$.
- (2p) e) Să se arate că $|u + v| \leq |u| + |v|$, $\forall u, v \in \mathbf{C}$.
- (2p) f) Să se arate că, dacă $z \in \mathbf{C}$, $|z| > 1$, atunci $10 \neq \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^9} + \frac{0,5}{z^{10}} + \frac{0,5}{z^{11}}$.
- (2p) g) Să se arate că $|x_k| \leq 1$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x - \frac{x}{x+1}$.

Pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fixat și pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, notăm $x_n(a) = \underbrace{(\sin \circ \sin \circ \dots \circ \sin)}_{de n ori sin}(a)$.

- (4p) a) Să se calculeze derivatele $f'(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $x \geq 0$.
- (4p) b) Să se arate că $f^{(3)}(x) < 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $x_n(a) \geq \frac{a}{na+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$.
- (2p) f) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1(a) + x_2(a) + \dots + x_n(a))$.

Varianta 008**Subiectul I**

- a) $|i^{2007}| = 1$
 b) Inversul lui i^{2007} este i .
 c) $\sin \frac{\pi}{2007} - \cos \frac{\pi}{2007} < 0$
 d) Aria triunghiului ABC este: $S_{ABC} = 15\sqrt{2}$.
 e) Ecuția cercului este: $(x-1)^2 + (y+1)^2 - 2^2 = 0$.
 f) Distanța de la punctul A la plan este: $\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

Subiectul II**1.**

- a) Coordonatele vârfului parabolei sunt: $x_V = 1$, $y_V = 4$.
 b) $n = 3$.
 c) $x = 6$.
 d) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.
 e) În multimea \mathbf{Z}_5 , $\hat{4}^{2007} = \hat{4}$.

2.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$.
 b) $f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$, pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{1}{3}$.
 d) Pentru orice $x > 1$, avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(1, \infty)$.
 e) $\int_1^2 f^3(x) dx = \frac{1}{2}$.

Subiectul III

- a) $f(1) = 55,5$.
 b) $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{10} = \frac{1}{20}$, $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = \frac{9}{10}$.
 c) Calcul direct.

d) Dacă $z \in \mathbf{C}$ și $g(z) = 0$, atunci $z \neq 0$ și $10z^{11} = z^{10} + \dots + z^2 + 0,5z + 0,5$ și

$$\text{împărțind ultima relație cu } z^{11} \text{ obținem: } 10 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^9} + \frac{0,5}{z^{10}} + \frac{0,5}{z^{11}}.$$

e) În planul complex, considerăm punctele $O(0)$, $A(u)$, $B(v)$ și $C(u+v)$.

În triunghiul (degenerat sau nu) OAB avem $OC \leq OA + AC$, de unde rezultă concluzia.

f) Presupunem că există $z \in \mathbf{C}$, $|z| > 1$, astfel încât $10 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^9} + \frac{0,5}{z^{10}} + \frac{0,5}{z^{11}}$

$$\text{Avem: } 10 = \left| \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^9} + \frac{0,5}{z^{10}} + \frac{0,5}{z^{11}} \right| \leq \left| \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z^2} \right| + \dots + \left| \frac{1}{z^9} \right| + \left| \frac{0,5}{z^{10}} \right| + \left| \frac{0,5}{z^{11}} \right| < 10, \text{ fals.}$$

g) Dacă z este o rădăcină a lui f , atunci z este și rădăcină a lui g și din punctul d),

$$\text{trebuie să avem } 10 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^9} + \frac{0,5}{z^{10}} + \frac{0,5}{z^{11}}, \text{ relație care, conform punctului f)}$$

este imposibilă dacă $|z| > 1$. Așadar modulele tuturor rădăcinilor lui f sunt ≤ 1 .

Subiectul IV

a) $f'(x) = \cos x - \frac{1}{(x+1)^2}$, $f^{(2)}(x) = -\sin x + \frac{2}{(x+1)^3}$, $f^{(3)}(x) = -\cos x - \frac{6}{(x+1)^4}$,
pentru orice $x \geq 0$.

b) Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x > 0$, deci $f^{(3)}(x) = -\cos x - \frac{6}{(x+1)^4} < 0$.

c) Din b) rezultă că funcția $f^{(2)}$ este strict descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și folosind a)
deducem că există un unic $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $f^{(2)}(\alpha) = 0$.

Obținem că funcția f' este strict crescătoare pe $[0, \alpha]$ și strict descrescătoare pe
 $x \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ și apoi că există un unic $\beta \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $f'(\beta) = 0$.

Dedecem că f este strict crescătoare pe $[0, \beta]$ și strict descrescătoare pe $\left(\beta, \frac{\pi}{2}\right]$ și
apoi că $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) \geq 0$.

d) În demonstrație se folosește monotonia funcției sinus și punctul c).

e) Pentru $x > 0$, aplicând teorema lui Lagrange funcției $g : [x, x+1] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(t) = \ln t$ deducem că există $c \in (x, x+1)$ astfel încât $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$.

Mai mult, $x < c < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

f) Înlocuind succesiv în partea din dreapta a inegalității de la e) numărul x cu fiecare din elementele mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ și adunând relațiile obținute, se deduce concluzia.

g) Folosind d) deducem:

$$x_1(a) + x_2(a) + \dots + x_n(a) > \frac{a}{a+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \stackrel{f)}{\geq} \frac{a}{a+1} \ln(n+1) \text{ și}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1(a) + x_2(a) + \dots + x_n(a)) = +\infty.$$