EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta **007**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine numărul real a astfel încât punctul $M\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3},1\right)$ să aparțină elipsei $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a}=1$.

(4p) **b)** Să se determine punctele de intersecție ale dreptei de ecuație $x+3y-7=0$ cu axele de coordonate.

(4p) **c)** Să se calculeze distanța de la punctul $M(2,3)$ la dreapta $y=-x$.

(4p) **d)** Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(-1, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ să aparțină planului de ecuație $ax+by+cz+6=0$.

(2p) **e)** Să se determine cel mai mare dintre numerele $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{2}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\cos^2 1+\sin^2 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^4-6X^3+13X^2-12X+4$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\left(X^2-3X+2\right)^2$.

(3p) **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f .

(3p) **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X+1$.

(3p) **d)** Să se determine suma coeficienților polinomului $\left(X^2-3X+2\right)^4$.

(3p) **e)** Să se determine cea mai mică valoare a funcției $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=x^2-3x+2$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

(3p) **a)** Să se arate că $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$.

(3p) **b)** Să se determine partea întreagă a numărului real $S = f(1)+f(2)+...+f(10)$.

(3p) **c)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

(3p) **d)** Să se determine asimptotele verticale la graficul funcției f .

(3p) **e)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulţimea $H=\left\{A\in \mathrm{M}_3(\mathbf{Q}) \,\middle|\, \det(A)\neq 0,\ A^{-1}=A^2+A\right\}$ şi matricele

$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se determine inversa matricei $X=a\cdot I_3$, unde $a\in \mathbf{R}^*$.

(4p) **b)** Să se arate că pentru orice $a\in \mathbf{Q}$, matricea $X=a\cdot I_3$ nu se află în H.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $A\in H$, atunci $A^3+A^2-I_3=O_3$.

(2p) **d)** Să se arate că dacă $A\in H$, atunci $A^5=I_3-A$.

(2p) **e)** Să se arate că matricea $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\in H$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A\in H$ şi $P\in M_3(\mathbf{Q})$ este o matrice inversabilă, atunci $P^{-1}\cdot A\cdot P\in H$.

(2p) **g)** Să se arate că mulţimea H conţine cel puţin 2007 elemente .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n=\int_0^1 x^{2n}\sin x\,dx$ şi funcţia

$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to \mathbf{R},\ f(x)=\sin x,\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$

(4p) **a)** Să se calculeze I_1.

(4p) **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

(4p) **c)** Să se arate că funcţia f este concavă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(2p) **d)** Să se arate că $\frac{2}{\pi}\cdot x<\sin x<x,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{1}{\pi(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n+1)},\ \forall n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Utilizând metoda integrării prin părţi, să se arate că

$I_n=2n\cdot\sin 1-\cos 1-2n(2n-1)\cdot I_{n-1},\ \forall n\in \mathbf{N},\ n\geq 2.$

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(nI_n)$.

Varianta 7

Subiectul I.

a) Punctul M aparține elipsei $\Leftrightarrow$ $a = 9$.

b) Intersecțiile dreptei cu axele sunt punctele $A(7,0)$, $B\left(0, \frac{7}{3}\right)$.

c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

d) Punctele A, B, C aparțin planului dat $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$.

e) Cel mai mare dintre cele trei numere este $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) 1.

Subiectul II.

1.

a) $(X^2 - 3X + 2)^2 = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4 = f$.

b) $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 2$.

c) Restul împărțirii lui f la g este 36.

d) Suma coeficienților polinomului este egală cu 0.

e) Cea mai mică valoare a funcției g este $y_V = -\frac{1}{4}$.

2.

a) Calcul direct.

b) $[S] = 0$.

c) $x = \frac{-1}{2}$ este punctul de maxim local al funcției.

d) Dreptele $d : x = 0$ și $g : x = -1$ sunt asimptote verticale (bilaterale).

e) $S = \ln\frac{4}{3}$.

Subiectul III.

a) $X^{-1} = \frac{1}{a} \cdot I_3$.

b) Presupunem contrariul deci că există $a \in \mathbf{Q}$ pentru care $X = aI_3 \in H$.

Înlocuind în $X^{-1} = X^2 + X$, obținem $a^3 + a^2 - 1 = 0$, dar ecuația anterioară nu are rădăcini raționale, fals.

c) Dacă $A \in H$, atunci A este inversabilă şi $A^{-1} = A^2 + A \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A^3 + A^2$

d) Se foloseşte punctul **c)** şi faptul că $A \in H$.

e) Calcul direct.

f) Dacă $A \in H$, rezultă că A este inversabilă.

Pentru o matrice inversabilă $P \in M_3(\mathbf{Q})$, notăm $U = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Atunci U este inversabilă şi $U^{-1} = \left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right)^{-1} = P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$.

Mai mult, se demonstrează că $U^2 + U = U^{-1}$, deci $U \in H$.

g) Pentru $a \in \mathbf{Q}^*$, toate matricele de forma $P_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sunt inversabile.

Alegem $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in H$.

Din **f)** rezultă că pentru orice $a \in \mathbf{Q}^*$, $P_a^{-1} \cdot A \cdot P_a \in H$.

Deoarece când a parcurge $\mathbf{Q}^*$, matricele $P_a^{-1} \cdot A \cdot P_a$ sunt elemente distincte ale mulțimii H, rezultă că mulțimea H are o infinitate de elemente, de unde deducem concluzia.

Subiectul IV.

a) Integrând prin părți obținem: $I_1 = \cos 1 + 2\sin 1 - 2$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{2n}\left(x^2 - 1\right) \cdot \sin x \, dx < 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, deci şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

c) $f''(x) \leq 0$ pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci f este concavă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, considerăm punctele $A(1, 0)$ şi $M(\cos x, \sin x)$ de pe cercul trigonometric. Deoarece y_M este mai mic decât lungimea arcului mic de cerc cu capetele în A şi M, deducem că $\sin x < x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Considerăm punctele $O(0, 0)$ şi $N\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ de pe graficul funcției sinus.

Deoarce pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, graficul funcției sinus este deasupra coardei (ON), se deduce concluzia.

e) Din **d)** obținem că $\frac{2}{\pi}\cdot x\le \sin x\le x$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ şi înmulțind inegalitatea cu $x^{2n}\ge 0$, avem: $\frac{2}{\pi}\cdot x^{2n+1}\le x^{2n}\cdot\sin x\le x^{2n+1}$, $\forall x\in[0,1]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Integrând această ultimă dublă inegalitate pe intervalul $[0,1]$, obținem concluzia.

f) Se verifică prin calcul direct.

g) Din **e)**, avem $0<I_n<\frac{1}{2(n+1)}<\frac{1}{2}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, deci şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este mărginit.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)(2n+1)}\cdot I_{n+1}=0$.

Din **f)**, înlocuind $n\in\mathbf{N}^*$ cu $n+1$, obținem $n\cdot I_n=\frac{2(n+1)\sin 1-\cos 1-I_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)}\cdot n$ şi

obținem $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot I_n)==\frac{1}{2}\cdot\sin 1$.