

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D****Varianta006**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(2, 1, -2)$ și $B(3, -3, 1)$.
- (4p) b) Să se determine raza cercului $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la parabola $y^2 = 5x$ în punctul $P(5, 5)$.
- (4p) d) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{5-2i}{2-5i}$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $M(2, 3)$, $N(2, -2)$ și $P(3, 2)$.
- (2p) f) Să se afle $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să se verifice egalitatea de numere complexe

$$\left(\cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} \right)^{10} = a + ib .$$

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze suma primilor 8 termeni dintr-o progresie aritmetică în care primul termen este 1 și rația este 3.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $2^n \leq 3 + \log_2 n$.
- (3p) c) Să se calculeze suma elementelor din grupul $(\mathbf{Z}_{11}, +)$.
- (3p) d) Să se calculeze expresia $E = C_5^1 - C_5^2 + C_5^3 - C_5^4$.
- (3p) e) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2006} + 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) e) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Convenim că $\text{rang}(O_2) = 0$.

- (4p) a) Să se calculeze determinanții matricelor J și I_2 .
- (4p) b) Să se calculeze matricea J^2 .
- (4p) c) Să se arate că, dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$.
- (2p) d) Să se găsească o matrice $M \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care $\text{rang}(M) \neq \text{rang}(M^2)$.
- (2p) e) Să se arate că, dacă matricea $B \in M_2(\mathbb{C})$ este inversabilă, atunci matricea B^n este inversabilă, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) f) Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că, dacă matricea $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ nu este inversabilă, atunci $C^n = (p+s)^{n-1}C$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- (2p) g) Să se arate că, dacă matricea $D \in M_2(\mathbb{C})$ verifică $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2)$, atunci $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = \frac{1}{e+1} + \frac{1}{e^2+1} + \dots + \frac{1}{e^n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- (4p) a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .
- (2p) c) Utilizând teorema lui Lagrange, să se arate că $\forall k \in [0, \infty)$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{e^c+1}$.
- (2p) d) Să se arate că $\frac{1}{e^{k+1}+1} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{e^k+1}$, $\forall k \in [0, \infty)$.
- (4p) e) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.
- (2p) f) Să se arate că $f(n+1) - f(1) < a_n < f(n) - f(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limită un număr real din intervalul $\left[\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right), \ln 2 \right]$.

Varianta 6

Subiectul I.

- a) $AB = \sqrt{26}$.
- b) Raza cercului este 4.
- c) $x - 2y + 5 = 0$.
- d) $\left| \frac{5-2i}{2-5i} \right| = 1$
- e) $S_{MNP} = \frac{5}{2}$.
- f) $a = -1, b = 0$.

Subiectul II.

1.

- a) 92.
- b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{2}{5}$.
- c) În grupul $(\mathbf{Z}_{11}, +)$, avem $\hat{0} + \hat{1} + \dots + \hat{10} = \hat{55} = \hat{0}$.
- d) $E = 0$.
- e) $x = 1$.

2.

- a) $f'(x) = 2006x^{2005}$.
- b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{2008}{2007}$.
- c) $f''(x) = 2006 \cdot 2005 \cdot x^{2004} \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f este convexă pe \mathbf{R} .
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.
- e) Ecuatia tangentei este $d : 2006x - y - 2004 = 0$.

Subiectul III.

- a) $\det(J) = 0$ și $\det(I_2) = 1$.
- b) $J^2 = O_2$.
- c) Se arată prin calcul direct.
- d) Matricea $M = J$ are rangul egal cu 1, iar $\text{rang}(M^2) = \text{rang}(O_2) = 0$
- e) Dacă matricea $B \in M_2(\mathbf{C})$ este inversabilă, atunci $\det(B) \neq 0$.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, obținem $\det(B^n) = (\det(B))^n \neq 0$, deci matricea B^n este inversabilă.

f) Considerăm matricea $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ neinversabilă, deci cu $\det(C) = 0$.

Notăm $p+s=t \in \mathbf{C}$. Din c) obținem $C^2 = t \cdot C$ și folosind această egalitate se demonstrează prin inducție că $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2, C^n = t^{n-1} \cdot C$.

g) Considerăm $D \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2)$.

Dacă $D = O_2$, atunci $D^n = O_2$, și $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^n) = 0$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Dacă $\text{rang}(D) = 1$, atunci $\det(D) = 0$.

Notăm cu t suma elementelor de pe diagonala principală a matricei D .

Folosind c) rezultă că $t \neq 0$ și din f) deducem că $D^n = t^{n-1} \cdot D, \forall n \in \mathbf{N}^*$ și apoi că $\text{rang}(D) = \text{rang}(t^{n-1} \cdot D) = \text{rang}(D^n), \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Dacă $\text{rang}(D) = 2$, atunci $\det(D^n) \neq 0$, deci $\text{rang}(D^n) = 2$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f' este strict descrescătoare pe \mathbf{R} .

c) Pentru orice $k \in [0, \infty)$, funcția f este o funcție Rolle pe intervalul $[k, k+1]$, deci conform teoremei lui Lagrange, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât

$$\frac{f(k+1) - f(k)}{k+1 - k} = f'(c) \Leftrightarrow f(k+1) - f(k) = \frac{1}{e^c + 1}.$$

d) $k < c < k+1 \stackrel{f' \text{ s.d.}}{\Leftrightarrow} f'(k) > f'(c) > f'(k+1) \stackrel{\text{a), e)}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{e^{k+1} + 1} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{e^k + 1}$,
pentru orice $k \in [0, \infty)$.

e) Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{e^{n+1} + 1} > 0$, deci sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

f) Din d), avem $f(k+1) - f(k) < \frac{1}{e^k + 1}, k \in [0, \infty)$.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, înlocuind succesiv în inegalitatea precedentă k cu fiecare din numerele $1, 2, \dots, n$ și adunând relațiile, obținem $f(n+1) - f(1) < a_n$ (1)

Din d), avem $\frac{1}{e^{k+1} + 1} < f(k+1) - f(k)$.

Înlocuind succesiv în inegalitatea precedentă k cu fiecare din numerele $0, 1, 2, \dots, n-1$ și adunând relațiile, obținem $a_n < f(n) - f(0)$ (2)

Din (1) și (2) rezultă concluzia.

g) Din a) deducem că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

Avem: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, de unde rezultă că $f(x) < 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

Din f) deducem că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior și fiind și strict crescător, este convergent.

Trecând la limită în dubla inegalitate din f) obținem $-f(1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq -f(0)$, de unde deducem concluzia.