EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D

***Varianta* ….005**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocaţională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanţa dintre punctele $A(1, 2, 3)$ şi $B(3, 2, 1)$.

(4p) **b)** Să se determine centrul de greutate al unui triunghi cu vârfurile în punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(2, 2)$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria cercului de ecuaţie $(x-2)^2+(y-3)^2=10$.

(4p) **d)** Să se determine modulul numărului complex $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{\pi}{5}\right)^{10}$.

(2p) **e)** Să se determine numărul punctelor de intersecţie dintre parabolele $y^2=4x$ şi $x^2=4y$.

(2p) **f)** Să se determine numărul soluţiilor din intevalul $[0, 2\pi]$ ale ecuaţiei $\sin x=1$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia $\lg(x^2+1)=1$.

(3p) **b)** Pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+1$, să se calculeze suma $f(1)+f(2)+...+f(10)$.

(3p) **c)** Să se determine probabilitatea ca alegând o funcţie din mulţimea funcţiilor definite pe mulţimea $\{1, 2\}$ cu valori în mulţimea $\{1, 2, 3\}$, aceasta să fie injectivă.

(3p) **d)** Să se determine al zecelea termen al unei progresii geometice cu primul termen 1024 şi cu raţia $\frac{1}{2}$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma coeficienţilor dezvoltării $(2x+1)^4$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

(3p) **c)** Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se arate că $\forall\, x\in\mathbf{R},\ f(x)\geq 0$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $H = \{ f \in \mathbf{Q}[X] \mid f(\sqrt[3]{2}) = 0 \}$

(4p) **a)** Să se arate că polinomul nul $f = 0$ este în H.

(4p) **b)** Să se arate că polinomul $X^3 - 2$ este din H.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $f_1, f_2 \in H$, atunci $f_1 - f_2 \in H$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că dacă $a, b, c \in \mathbf{Q}$ şi $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$ atunci $a = b = c = 0$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $g \in \mathbf{Q}[X]$ şi $grad(g) = 1$ sau $grad(g) = 2$, atunci $g \notin H$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $grad(f) = 3$ şi $f \in H$, atunci există $a \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $f = a \cdot (X^3 - 2)$.

(2p) **g)** Să se arate că $H = \{ (X^3 - 2) \cdot q \mid q \in \mathbf{Q}[X] \}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = f'(x)$.

(4p) **a)** Să se arate că $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, $x > 0$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția g este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că $g(x) \geq 0$, $\forall x > 0$.

(2p) **d)** Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Utilizând teorema lui *Lagrange,* să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$ există $c_n \in (n, n+1)$ astfel încât $g(c_n) = f(n+1) - f(n)$.

(2p) **f)** Să se arate că $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $\frac{n}{2(n+2)} < \ln \frac{2n+2}{n+2} < \frac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 5

Subiectul I.

a) $AB = 2\sqrt{2}$.

b) Centrul de greutate al triunghiului ABC este punctul $G(1,1)$.

c) Aria cercului este $S = 10\pi$.

d) $\left|\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{\pi}{5}\right)^{10}\right| = 1$

e) Cele două curbe au două puncte comune.

f) Ecuația are o singură soluție, $x = \frac{\pi}{2}$.

Subiectul II.

1.

a) $x \in \{-3, 3\}$.

b) $f(1) + f(2) + ... + f(10) = 395$.

c) Probabilitatea căutată este $p = \frac{2}{3}$.

d) $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2$.

e) Suma coeficienților dezvoltării este 81.

2.

a) $f'(x) = e^x - 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

b) Deoarece $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (-\infty, 0)$, funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$.

c) $f''(x) = e^x > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci funcția este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $x = 0$ este punct de minim global pentru f, deci $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq f(0) = 0$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \infty$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) $f(\sqrt[3]{2}) = 0$ și $f \in \mathbf{Q}[X]$ $\Rightarrow$ $f \in H$.

c) Pentru $f_1, f_2 \in H$, avem $(f_1 - f_2)(\sqrt[3]{2}) = 0$, deci $f_1 - f_2 \in H$.

d) Considerăm $a, b, c \in \mathbf{Q}$, astfel încât $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$.

Înmulțind relația anterioară cu $\sqrt[3]{2}$ obținem și $b\sqrt[3]{4} + c\sqrt[3]{2} + 2a = 0$.

Reducându-l pe $\sqrt[3]{4}$ din egalitățile precedente, deoarece $a, b, c \in \mathbf{Q}$, obținem

$abc = b^3 = 2a^3$ și apoi $a = b = c = 0$.

e) Dacă $g \in \mathbf{Q}[X]$, $g = aX + b$, cu $a, b \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$, din $g(\sqrt[3]{2}) = 0$ rezultă $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{Q}$, fals.

Dacă $g \in \mathbf{Q}[X]$, $g = aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$, din $g(\sqrt[3]{2}) = 0$ şi din punctul **d)** obținem că $a = 0$, fals.

Aşadar, nici un polinom de grad 1 sau 2 din $\mathbf{Q}[X]$ nu se află în mulțimea *H*.

f) Considerăm $f \in H$, $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, cu $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$.

$f(\sqrt[3]{2}) = 0 \overset{\text{d)}}{\Rightarrow} b = c = d + 2a = 0 \Rightarrow f = a \cdot (X^3 - 2)$.

g) Evident, avem $M = \{(x^3 - 2) \cdot q \mid q \in \mathbf{Q}[X]\} \subset H$

Fie $f \in H$. Din teorema împărțirii cu rest, există şi sunt unice $q \in \mathbf{Q}[X]$ şi $a, b, c \in \mathbf{Q}$, astfel ca $f = (X^3 - 2) \cdot q + aX^2 + bX + c$.

Din $f(\sqrt[3]{2}) = 0$ rezultă $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$ şi folosind punctul **d)** se obține că $a = b = c = 0$, deci $f = (X^3 - 2) \cdot q$, adică şi $H \subset M$.

În concluzie, $H = \{(x^3 - 2) \cdot q \mid q \in \mathbf{Q}[X]\}$.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) $g'(x) < 0$, $\forall x > 0$, deci g este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

c) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x} > 0$, $\forall x > 0$.

d) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, avem:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}.$$

e) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, funcția f este o funcție Rolle pe $[n, n+1]$ şi din teorema lui Lagrange, există $c_n \in (n, n+1)$ astfel ca $\dfrac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = f'(c_n)$, de unde rezultă concluzia.

f) Din punctul **b)** deducem că $g(n+1) < g(c_n) < g(n)$ şi folosind e) obținem $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) Din punctele **a)** şi **f)** obținem

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} < \ln\frac{k+1}{k+2} - \ln\frac{k}{k+1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

Înlocuindu-l succesiv pe k cu numerele 1, 2, ..., n în inegalitatea precedentă şi adunând inegalitățile obținute, rezultă concluzia.