

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D****Varianta004**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**SUBIECTUL I (20p)**

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului AB , dacă $A(-5,3)$ și $B(2,1)$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $M(3,-2)$ la dreapta $3x - 4y + 2 = 0$.
- (4p) c) Să se determine modulul numărului complex $z = (3 - 4i)(1 + i)$.
- (4p) d) Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta $x - y = 0$ și cercul $x^2 + y^2 = 4$.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe
- $$(1 - i\sqrt{3})^3 = a + ib.$$
- (2p) f) Să se determine $\cos(2007\pi)$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se calculeze suma $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 100$.
- (3p) b) Să se rezolve în mulțimea \mathbf{R} ecuația $x^3 + x - 2 = 0$.
- (3p) c) Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $x^2 + x - 6 \leq 0$.
- (3p) d) Să se determine al cincilea termen al dezvoltării $(2x + \sqrt[3]{x})^{10}$.
- (3p) e) Să se rezolve în intervalul $(\sqrt{5}, \infty)$, ecuația $\log_2(x^2 - 5) = 2$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$.

- (3p) a) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$.
- (3p) b) Să se determine ecuațiile asymptotelor verticale la graficul funcției f .
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze suma $S = f(1) + f(2) + \dots + f(2007)$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru o matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ notăm $tr(A) = a + d$ și considerăm polinomul atașat matricei A , $f = X^2 - tr(A) \cdot X + \det(A)$. Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ rădăcinile polinomului f și considerăm matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se verifice că $A - xI_2 = \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbf{C}$.
- (4p) b) Să se arate că $f(x) = \det(A - xI_2)$, $\forall x \in \mathbf{C}$.
- (4p) c) Să se verifice că $x_1 + x_2 = tr(A)$ și $x_1 \cdot x_2 = \det(A)$.
- (2p) d) Să se arate că polinomul atașat matricei I_2 are rădăcinile $x_1 = 1$ și $x_2 = 1$.
- (2p) e) Să se verifice că $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$ și $A^{n+2} - (a+d)A^{n+1} + (ad-bc)A^n = O_2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că polinomul atașat matricei A^n are rădăcinile x_1^n și x_2^n , $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că dacă matricea A verifică $|tr(A)| > 2$, atunci $A^n \neq I_2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirul $(a_n)_{n \geq 0}$, definit prin $a_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots + \frac{(-1)^n}{3n+1}$ și funcțiile

$$f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_n(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \dots + \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $a_0 = 1$ și $f_0(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{x^4}$.
- (4p) c) Să se determine $f'_n(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $f'_n(x) = \frac{1}{1+x^3} - (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{1+x^3}$, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se arate că $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.
- (2p) f) Să se arate că $a_n = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{1+x^3} dx$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Varianta 4

Subiectul I

- a) $\sqrt{53}$. b) $\frac{19}{5}$. c) $5\sqrt{2}$. d) $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. e) $a = -8$, $b = 0$. f) -1 .

Subiectul II

- 1) a) 1717. b) $x = 1$. c) $[-3, 2]$. d) $T_5 = 2^6 \cdot C_{10}^4 \cdot \sqrt[3]{x}^{22}$. e) 3.
- 2) a) Calcul direct. b) $x = 0$, $x = -1$. c) 0. d) $\frac{1}{3}$. e) $\frac{2007 \cdot 2009}{2008^2}$.

Subiectul III

- a) Calcul direct.

b) $\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc = f(x)$.

c) Din relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 = \text{tr}(A)$, $x_1 x_2 = \det A$.

d) $\text{tr}I_2 = 2$, $\det I_2 = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$.

e) Prima relație se obține prin calcul direct, iar a doua prin înmulțirea sa cu A^n .

f) Dacă $x_1(n)$ și $x_2(n)$ sunt rădăcinile atașate polinomului asociat matricei A^n , arătăm că au loc relațiile $\begin{cases} x_1(n) + x_2(n) = x_1^n + x_2^n \\ x_1(n) \cdot x_2(n) = x_1^n \cdot x_2^n \end{cases}$.

Cum $x_1(n) \cdot x_2(n) = \det(A^n) = [\det(A)]^n$ și

$x_1^n \cdot x_2^n = (x_1 x_2)^n = [\det(A)]^n \Rightarrow x_1(n) x_2(n) = x_1^n x_2^n$. Demonstrăm prin inducție că $\det(A^n) = x_1^n + x_2^n$, oricare ar fi $n \in N$ și deci x_1^n și x_2^n sunt rădăcinile cerute.

g) Presupunem $A^n = I_2$ și fie x_1, x_2 rădăcinile polinomului f atașat lui A . Atunci, conform punctului f), x_1^n, x_2^n sunt rădăcinile lui $A^n = I_2$. Polinomul f atașat lui I_2 are rădăcina dublă 1, deci $x_1^n = x_2^n = 1$. Rezultă $|x_1| = |x_2| = 1$. Atunci $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| = 2 \Rightarrow |\text{tr}A| \leq 2$, contradicție.

Subiectul IV:

- a) Calcul direct.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{4}x^4}{x^4} = -\frac{1}{4}$.

c) $f_n'(x) = 1 - x^3 + x^6 - \dots + (-1)^n \cdot x^{3n}$.

d) Din c) $\Rightarrow f_n'(x) = 1 \cdot \frac{1 - (-x^3)^{n+1}}{1 - (-x^3)} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{3n+3}}{1 + x^3}$, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

e) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

f) Integrând egalitatea de la d) pe $[0,1]$ și ținând seama de rezultatul de la e) obținem

$$f_n(x)|_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{1+x^3} dx. \text{ Dar } f_n(x)|_0^1 = f_n(1) - f_n(0) = a_n.$$

$$\text{g) } \forall x \in [0,1] \text{ avem } 0 \leq \frac{x^{3n+3}}{1+x^3} \leq x^{3n+3} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{1+x^3} dx \leq \int_0^1 x^{3n+3} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{1+x^3} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{x^{3n+3}}{1+x^3} \right| dx = \frac{1}{3n+4}.$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+4} = 0$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{1+x^3} dx = 0$. Ținând cont de egalitatea de la

$$\text{f), obținem că } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$