

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta003***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $(1-i)^4$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $C(1, 1)$ la dreapta $x + y = 0$.
- (4p) c) Să se determine ecuația tangentei la hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, în punctul $P(4, 3)$.
- (4p) d) Să se determine $a > 0$, astfel încât punctul $C(1, 1)$ să se afle pe cercul $x^2 + y^2 = a$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, -1)$, $B(3, -3)$ și $C(1, 1)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\cos \pi + i \sin \pi)^3 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)**1.**

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.
- (3p) b) Să se calculeze expresia $C_6^1 - C_6^2 + C_6^4 - C_6^5$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este $f(x) = x^4 - x$, să se calculeze $(f \circ f)(1)$.
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, \dots, 5\}$, să verifice relația $2^n \geq 3n + 2$.
- (3p) e) Să se calculeze suma elementelor din grupul $(\mathbb{Z}_8, +)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 3)$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea M formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane și toate elementele din mulțimea numerelor naturale.

- (4p) a) Să se verifice că $E \in M$ și că $I_3 \in M$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.
- (2p) d) Să se calculeze determinantul matricei E .
- (2p) e) Să se găsească o matrice $C \in M$, astfel încât $\text{rang}(C)=1$ și o matrice $D \in M$, astfel încât $\text{rang}(D)=2$.
- (2p) f) Să se arate că matricea E este inversabilă și $E^{-1} \notin M$.
- (2p) g) Să se arate că, dacă matricea $X \in M$ este inversabilă și $X^{-1} \in M$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie a sa este egală cu 1 și suma elementelor de pe fiecare coloană a sa este egală cu 1.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln a - a \ln x$, unde $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (4p) b) Să se calculeze $f(a)$ și $f'(a)$.
- (4p) c) Să se arate că $e^x \geq x^e$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (2p) d) Utilizând teorema lui Fermat să se determine $a > 0$ astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (2p) e) Să se arate că $\int_1^2 e^x dx \geq \int_1^2 x^e dx$.
- (2p) f) Să se arate că pentru $x > 0$, avem $e^x = x^e$ dacă și numai dacă $x = e$.
- (2p) g) Să se determine numerele reale $c, b, d > 0$ cu proprietatea că $c^x + b^x + d^x \geq x^c + x^b + x^d$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Varianta 3

Subiectul I.

- a) $\left| (1-i)^4 \right| = 4$
 b) Distanța căutată este $\sqrt{2}$
 c) Ecuația tangentei în P la hiperbolă este $x-y=1$.
 d) Punctul C aparține cercului $\Leftrightarrow a=2$.
 e) Aria căutată este $S_{ABC} = 2$.
 f) $a=-1$, $b=0$.

Subiectul II.

1.

- a) $x=0$.
 b) 0.
 c) $(f \circ f)(1)=0$.
 d) Probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$.
 e) În Z_8 avem: $\hat{0} + \hat{1} + \dots + \hat{7} = \hat{4}$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
 b) $\int_0^1 f'(x) dx = \ln \frac{4}{3}$.
 c) Pentru $x \in [0, \infty)$, avem $f'(x) \geq 0$, deci f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
 d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$.
 e) Funcția f are un singur punct de extrem local și anume $x=0$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) Evident, $A, B \in M_3(\mathbf{N}) \Rightarrow A+B \in M_3(\mathbf{N})$, suma a două numere naturale fiind un număr natural.c) Evident, $A, B \in M_3(\mathbf{N}) \Rightarrow A \cdot B \in M_3(\mathbf{N})$,d) $\det(E)=1$.

e) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ are rangul 1, iar $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ are rangul 2.

f) $\det(E)=1 \neq 0$, deci E este o matrice inversabilă în $M_3(\mathbf{R})$.

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \cdot E^* = E^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \notin M, \text{ deoarece } -2 \notin \mathbf{N}.$$

g) Presupunem că X are o linie cu cel puțin două elemente nenule.

Fără a restrâng generalitatea, putem considera că prima linie a matricei X este

$$(a \ b \ c), \text{ cu } a, b \in \mathbf{N}^*. \text{ Notăm cu } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ prima coloană a matricei } X^{-1}.$$

Făcând efectiv înmulțirea, obținem $x \neq 0$ și $y \neq 0$, deci $ax + by + cz \geq 2$, contradicție cu $ax + by + cz = 1$.

Rezultă că fiecare linie a matricei X are exact un element nenul.

Analog obținem că și fiecare coloană a lui X conține un singur element nenul.

Așadar X are exact trei elemente nenule, situate pe linii și pe coloane diferite.

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^*$ aceste trei elemente. Atunci $\det(X) = \alpha\beta\gamma$ sau $\det(X) = -\alpha\beta\gamma$. și deoarece $\det(X \cdot X^{-1}) = \det(X) \cdot \det(X^{-1}) = 1$, deducem că $\det(X) \in \{-1, 1\}$ și de aici $\alpha = \beta = \gamma = 1$, de unde rezultă concluzia.

Subiectul IV.

a) $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x}, \quad x > 0$.

b) $f(a) = 0, \quad f'(a) = \ln a - 1$.

c) Alcătuind tabelul de variație al funcției $u : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad u(x) = x - e \cdot \ln x$ se deduce că $x = e$ este punct de minim global pentru funcția u , de unde rezultă concluzia.

d) $f(x) \geq 0, \forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow x = e$ este punct de minim pentru funcția f .

Din teorema lui Fermat rezultă că $f'(a) = \ln a - 1 = 0$, deci $a = e$.

Reciproc, din punctul c) deducem că pentru $a = e$ avem $f(x) \geq 0, \forall x \in (0, \infty)$.

În consecință, soluția este $a = e$.

e) Integrând pe intervalul $[1, 2]$ inegalitatea obținută la c), rezultă concluzia.

f) $e^x = x^e \Leftrightarrow x \cdot \ln e = e \cdot \ln x \Leftrightarrow u(x) = 0 \stackrel{c)}{\Leftrightarrow} x = e$.

g) Înlocuind în c) x cu fiecare din numerele b, c, d și folosind f), obținem $b = c = d = e$.