

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D*****Varianta002***

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocatională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(-2, 4)$ și $B(2, 0)$ să aparțină dreptei de ecuație $y = ax + b$.
- (4p) b) Dacă punctul M este simetricul punctului $A(-2, 4)$ față de punctul $B(2, 0)$, să se determine coordonatele punctului M .
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $O(0, 0)$, $A(-2, 4)$ și $B(2, 0)$.
- (4p) d) Să se determine semnul numărului $\cos 3$.
- (2p) e) Să se calculeze tangenta unghiului determinat de diagonala unui cub cu o față laterală a sa.
- (2p) f) Să se arate că punctele $C(1, 1, 1)$, $D(0, 1, 1)$, $E(1, 0, 1)$, $F(1, 1, 0)$ sunt necoplanare.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $A = \{0, 3, 6, \dots, 30\}$.

- (3p) a) Să se calculeze numărul elementelor mulțimii A .
- (3p) b) Să se determine numărul de submulțimi ale mulțimii A care au trei elemente.
- (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea A să fie număr prim.
- (3p) d) Să se calculeze suma elementelor mulțimii A .
- (3p) e) Să se determine câte submulțimi ale mulțimii A au 2 elemente și nu îl conțin pe 0.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (3p) b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^{\sqrt{3}} f'(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numerele reale a_1, a_2, \dots, a_n distincte și $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{R}$ arbitrar, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$.

Definim polinoamele $w_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3) \dots (X - a_n)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)}$, $w_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3) \dots (X - a_n)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n)}$, ...,

$w_n = \frac{(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_{n-1})}{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})}$ și $L_n = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_n w_n$.

- (4p) a) Să se verifice că $w_i(a_j) = 0$, $\forall i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- (4p) b) Să se verifice că $w_1(a_1) = w_2(a_2) = \dots = w_n(a_n) = 1$.
- (4p) c) Să se verifice că $\text{grad } (w_1) = \dots = \text{grad } (w_n) = n-1$.
- (2p) d) Să se arate că polinomul L_n are gradul cel mult $n-1$ și $L_n(a_k) = b_k$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $f \in \mathbf{R}[X]$, $\text{grad}(f) \leq n-1$ și $f(a_k) = b_k$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, atunci $f = L_n$.
- (2p) f) Să se arate că $(17a_1 + 11)w_1 + (17a_2 + 11)w_2 + \dots + (17a_n + 11)w_n = 17X + 11$.
- (2p) g) Să se calculeze $a_1^2 \cdot w_1(1) + a_2^2 \cdot w_2(1) + \dots + a_n^2 \cdot w_n(1)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră numerele strict pozitive $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \int_a^b t^x dt$

și funcția $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \ln x - 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$.

- (4p) a) Să se arate că $(x+1) \cdot f(x) = b^{x+1} - a^{x+1}$, pentru orice $x \in [1, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1, \infty)$.
- (4p) c) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in [1, \infty)$.
- (2p) d) Dacă $0 < a < b < 1$, să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) e) Să se arate că $g(x) > 0$, $\forall x \in (1, \infty)$.
- (2p) f) Să se demonstreze inegalitatea $2 \cdot \frac{b-a}{b+a} < \ln \frac{b}{a}$, pentru orice $0 < a < b$.
- (2p) g) Să se arate că $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2}{2n+1} < \ln(n+1)$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 2

Subiectul I.

- a) $a = -1$ și $b = 2$
 b) Fie $M(6, -4)$
 c) Aria triunghiului OAB este $S_{OAB} = 4$.
 d) $\cos 3 < 0$.
 e) $\operatorname{tg}(D\hat{B}D') = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

f)
$$\begin{vmatrix} x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \\ x_E & y_E & z_E & 1 \\ x_F & y_F & z_F & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
, deci punctele C, D, E, F sunt necoplanare.

Subiectul II.

1.

- a) A are 11 elemente.
 b) A are 165 submulțimi cu trei elemente.
 c) Probabilitatea cerută este $\frac{1}{11}$.
 d) $0+3+6+\dots+10=165$.
 e) Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii A care nu îl conțin pe 0 este 45

2.

- a) $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.
 b) $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$, deci funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{5}$.
 d) $f''(x) > 0$, $\forall x > 0$, deci funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
 e) $\int_1^{\sqrt{3}} f'(x) dx = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$.

Subiectul III.

- a) Pentru $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, la numărătorul funcției w_i apare factorul $X - a_j$, așadar $w_i(a_j) = 0$.
 b) $w_1(a_1) = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_n)} = 1$ și analog, $w_1(a_1) = w_2(a_2) = \dots = w_n(a_n) = 1$.

c) Evident.

d) Se știe că gradul sumei mai multor polinoame este mai mic sau egal decât cel mai mare dintre gradele polinoamelor componente.

Pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, avem: $L_n(a_k)^{\text{a), b)} = b_k$.

e) Considerăm polinomul $g \in \mathbf{R}[X]$, $g = f - L_n$ și folosind d) deducem că g este polinomul nul.

f) Considerăm $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = 17X + 11$.

Pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, alegând $b_k = 17a_k + 11$ în polinomul L_n și folosind punctele d) și e), rezultă concluzia.

g) Considerăm $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^2$.

Pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, alegând $b_k = a_k^2$ în polinomul L_n , și folosind d) și e) rezultă concluzia.

Subiectul IV.

a) $f(x) = \int_a^b t^x dt = \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1} \Leftrightarrow (x+1) \cdot f(x) = b^{x+1} - a^{x+1}, \forall x \in [1, \infty)$.

b) Avem $f'(x) = \frac{b^{x+1}((x+1)\ln b - 1) - a^{x+1}((x+1)\ln a - 1)}{(x+1)^2}, \forall x \in [1, \infty)$.

c) $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x \cdot (x+1)^2}, \forall x \in [1, \infty)$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

e) $g'(x) > 0, \forall x \in (1, \infty)$, deci g este strict crescătoare pe $[1, \infty)$.

Cum $g(1) = 0$, deducem că $g(x) > g(1) = 0, \forall x \in (1, \infty)$.

f) Deoarece $\frac{b}{a} > 1$, rezultă $g\left(\frac{b}{a}\right) > 0$, de unde deducem inegalitatea din enunț.

g) $\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2}{2n+1} = 2 \cdot \frac{2-1}{2+1} + 2 \cdot \frac{3-2}{3+2} + \dots + 2 \cdot \frac{(n+1)-n}{(n+1)+n} \stackrel{f)}{<} \ln(n+1)$.