EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta** ….**001

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocaţională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(2,-5,3)$ şi este paralelă cu dreapta $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$.

(4p) **b)** Să se determine valoarea numărului $\sin^2 2007\pi+\cos^2 2007\pi$.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie ale hiperbolei $2x^2-5y^2-8=0$ cu dreapta $5y=x$

(4p) **d)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ şi $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

(2p) **e)** Să se determine partea reală a numărului complex $\frac{2+3i}{3-2i}$.

(2p) **f)** Să se determine aria unui triunghi având lungimile a două laturi de 4 şi 5, iar unghiul dintre ele de 30°.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine suma coeficienţilor polinomului $(5X-4)^3$.

(3p) **b)** Să se determine câte numere de 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele 2,3,4,5.

(3p) **c)** Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x-3$.

Să se calculeze numărul $f(-3)\cdot f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)$.

(3p) **d)** Să se determine partea întreagă a numărului $\sqrt{42}$.

(3p) **e)** Să se determine probabilitatea ca un element n din mulţimea $\{0,1,2,3\}$ să verifice relaţia $3^n+5^n=2^n+6^n$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

(3p) **a)** Să se arate că $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1},\ \forall x\in(0,\infty)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0,\infty)$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-0,5}{x-1}$.

(3p) **d)** Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între axa Ox, graficul funcţiei f şi dreptele $x=1$ şi $x=2$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi şirul $(F_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $n\in \mathbf{N}^*$, cu $F_0=0$, $F_1=1$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **b)** Să se calculeze F_2 şi F_3.

(4p) **c)** Să se arate că $A^2=A+I_2$ şi $A^{n+1}=A^n+A^{n-1}$, $\forall\, n\in \mathbf{N}$, $n\geq 2$.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$, $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Utilizând relaţia $\det(A^n)=(\det A)^n$, să se arate că $F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$, $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Utilizând egalitatea $A^n\cdot A^m=A^{m+n}$, să se arate că

$F_{n+m}=F_{n+1}\cdot F_m+F_n\cdot F_{m-1}$, $\forall\, n\in \mathbf{N}$, $\forall\, m\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{F_k\cdot F_{k+1}}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$, $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră numerele reale *a, b,* $0<a<b$ şi funcţiile $f:(0,\infty)\to \mathbf{R}$, $g:(0,\infty)\to \mathbf{R}$,

$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, $g(x)=ln(1+x)-x$, $\forall x\in (0,\infty)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $g'(x)$, $x\in (0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $g(x)<0$, $\forall\, x\in (0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x)<1$, $\forall\, x\in (0,\infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx<\frac{1}{3}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0} f(x)$ şi $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx} f(t)\,dt$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx} f(t)\,dt$.

Varianta 1

Subiectul I

a) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-3}{9}$. b) 1. c) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{10}}{3} & \frac{2\sqrt{10}}{15} \\ \frac{-2\sqrt{10}}{3} & \frac{-2\sqrt{10}}{15} \end{pmatrix}$. d) 0. e) 0. f) 5.

Subiectul II

1. a)1. b) $A_4^3=24$. c) 0. d) 6. e) $\frac{1}{2}$.

2 .a) Calcul direct. b) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$; c) $f'(1)=-\frac{3}{4}$; d) $\ln\frac{4}{3}$. e) 1.

Subiectul III

a) $\det A=-1\neq 0 \Rightarrow rang A=2$; b) $F_2=1, F_3=2$.

c) $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=A+I_2$; $A^{n+1}=A^n+A^{n-1}$ se obtine inmultind relatia precedenta cu A^{n-1}.

d) $A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} F_{n+1}+F_n & F_{n+1} \\ F_n+F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$.

e) $(\det A)^n=(-1)^n=\det(A)^n=F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2$.

f) $A^n\cdot A^m=A^{n+m}$ si inlocuim pe A^n, A^m si A^{n+m} din d).

g) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{F_k\cdot F_{k+1}}\overset{e)}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k^2-F_{k-1}\cdot F_{k+1}}{F_k\cdot F_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{F_k}{F_{k+1}}-\frac{F_{k-1}}{F_k}\right)=\frac{F_n}{F_{n+1}}, (\forall) n\geq 1$.

Subiectul IV

a) $g'(x)=-\frac{x}{x+1}$;

b) $x>0, x+1>0, \forall x\in(0,\infty)\overset{a)}{\Rightarrow} g'(x)<0, \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow$ g strict descrescatoare pe $(0,\infty)\Rightarrow g(x)<g(0); \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow g(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

c) $f(x)<1 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(1+x)-x}{x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{x}<0 \Leftrightarrow g(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

d) Din b) $\Rightarrow x\ln(1+x)<x^2, \forall x\in(0,\infty) \Rightarrow \int_0^1 x\ln(1+x)dx<\int_0^1 x^2dx \Rightarrow \int_0^1 x\ln x(1+x)dx<\dfrac{1}{3}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1; \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=0.$

f) Fie F : $[0,\infty)\to \mathbf{R}$ o primitiva a functiei f. Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{ax}^{bx} f(t)dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{F(bx)-F(ax)}{x}\underset{l'Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{bf(bx)-af(ax)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{b\ln(1+bx)}{bx}-\frac{a\ln(1+ax)}{ax}=b-a$$

g) f continua pe $[ax,bx]$ implica, $\exists u_x\in(ax,bx)$ astfel incat

$\int_{ax}^{bx} f(t)dt=(bx-ax)\cdot f(u)=x(b-a)f(u_x)$, $x\to\infty$ implica $u_x\to\infty$. Avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx} f(t)dt=\lim_{u_x\to\infty}(b-a)f(u_x)=(b-a)\lim_{u_x\to\infty} f(u_x)=(b-a)\cdot 0=0.$$