

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
***Varianta ....100***

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze numărul complex  $(1+2i) \cdot (1-3i)$ .
- (4p) b) Să se determine  $m, n \in \mathbf{R}$  astfel încât punctele  $A(2, 1), B(4, 5)$  să se afle pe dreapta de ecuație  $y = mx + n$ .
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului  $MNP$ , dacă  $MP = 2$ ,  $NP = 4$  și  $\sin P = \frac{1}{2}$ .
- (4p) d) Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât dreptele de ecuații  $y = 2x + 1$  și  $y = (a+1)x + 3$  să fie paralele.
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin(2\pi + x)$ , știind că  $\sin x = 0,4$ .
- (2p) f) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime  $\sqrt{3}$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se arate că punctul  $A(1, 2)$  este situat pe graficul funcției  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 + 3x - 3$ .
- (3p) b) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația  $(\sqrt[3]{x})^2 - 5\sqrt[3]{x} + 6 = 0$ .
- (3p) c) Să se rezolve ecuația  $\frac{(x+1)!}{x!} = 2x - 3$ , știind că  $x \in \mathbf{N}$ .
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea  $\{1, 2, \dots, 20\}$  să se dividă cu 7.
- (3p) e) Să se calculeze  $C_7^1 + C_7^2$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ , pentru  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) c) Să se arate că  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{6x^2 + 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_2(\mathbf{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

și  $C = A + B$ . Se admite cunoscut faptul că  $\det(XY) = \det(X) \cdot \det(Y)$ ,  $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{R})$ .

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $A^2$  și  $A^3$ .
- (4p) c) Să se arate că  $B^2 = B + 2I_2$ .
- (2p) d) Să se arate că  $C = 2 \cdot I_2$  și  $C^2 = 2^2 \cdot I_2$ .
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $C^n = 2^n \cdot I_2$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) f) Să se calculeze matricea  $X = C + C^2 + C^3 + \dots + C^{2007}$ .
- (2p) g) Să se determine restul împărțirii la 4 a numărului  $\det(X)$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ .

- (4p) a) Să se arate că  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ ,  $\forall x > 0$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$ .
- (4p) c) Să se arate că  $f'(x) = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$ ,  $\forall x > 0$ .
- (2p) d) Să se arate că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(0, \infty)$ .
- (2p) e) Să se determine ecuația asymptotei verticale a graficului funcției  $f$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ .

### Varianta 100

#### **Subiectul I**

- a)  $z = 7 - i$ .  
 b)  $m = 2$  și  $n = -3$ .  
 c)  $S_{MNP} = 2$ .  
 d)  $a = 1$ .  
 e)  $\sin(x + 2\pi) = 0,4$ .  
 f)  $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

#### **Subiectul II**

1.

- a) Deci  $A(1,2)$  se află pe graficul funcției  $f$ .  
 b)  $x_1 = 8$  și  $x_2 = 27$ .  
 c)  $x = 4$ .  
 d) Probabilitatea este  $\frac{2}{20} = 0,1$ .  
 e)  $C_7^1 + C_7^2 = 28$ .

2.

- a)  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ .  
 b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$ .  
 c)  $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ .  
 d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{6x^2 + 1} = \frac{1}{2}$ .  
 e)  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{31}{4}$ .

#### **Subiectul III**

- a)  $\det A = 0$ .  
 b)  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$ .  
 c)  $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B + 2I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Deci  $B^2 = B + 2I_2$ .  
 d)  $C = A + B = 2I_2; C^2 = (2I_2)^2 = 2^2 I_2^2 = 2^2 I_2$ .

e) Notăm cu  $P(k)$ :  $C^n = 2^n I_2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$P(1) : C^1 = 2I_2, \text{ adevărat.}$$

Presupunem  $P(k)$  adevărată și demonstrăm că  $P(k)$  este propoziție adevărată.

Deci  $C^k = 2^k I_2$ . Atunci  $C^{k+1} = C^k \cdot C = 2^k I_2 \cdot C = 2^k C = 2^k \cdot 2I_2 = 2^{k+1} I_2$ .

Prin urmare  $P(k+1)$  este propoziție adevărată.

Folosind metoda inducției matematice, rezultă că  $P(n)$  este adevărată,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

f)  $X = C + C^2 + C^3 + \dots + C^{2007} = 2I_2 + 2^2 I_2 + 2^3 I_2 + \dots + 2^{2007} I_2 =$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2007})I_2 = 2 \cdot \frac{2^{2007} - 1}{2 - 1} I_2 = (2^{2008} - 2)I_2.$$

g)  $\det X = \begin{vmatrix} 2^{2008} - 2 & 0 \\ 0 & 2^{2008} - 2 \end{vmatrix} = (2^{2008} - 2)^2 = 4 \cdot (2^{2007} - 1)^2.$

Rezultă că numărul  $\det(X)$  se împarte exact la 4, deci restul este zero.

#### Subiectul IV

a)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = f(x).$

b)  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$

c)  $f'(x) = \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)' = \frac{-(2x+1)}{x^2(x+1)^2}, x > 0.$

d)  $f'(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$ , deci funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(0, \infty)$ .

e)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \infty$ . Deci ecuația asymptotei verticale este:  $x = 0$ .

f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

g)  $\int_1^n f(x) dx = \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_1^n = \ln n - \ln(n+1) + \ln 2 = \ln \frac{2n}{n+1}.$

Atunci:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2n}{n+1}\right) = \ln 2.$