

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta099

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(3, -2)$ la punctul $B(-2, 3)$.
- (4p) b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(1+3i)(4-2i)=a+bi$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{15}$.
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex $-4-9i$.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(3, -2)$ și $B(-2, 3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC , $AB = 3$, $AC = 8$ și $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$, să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 2 & 30 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n \geq 28$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $64^x - 32 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația $\log_8 x = 3$.
- (3p) e) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^4 + 1$ la polinomul $g = X^2 + X + 1$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x^4}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$, se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 9.$$

- (4p) a) Să se determine $x \in \mathbf{N}$ astfel încât $f(x) = 0$.
- (4p) b) Să se calculeze $\det(A)$.
- (4p) c) Să se calculeze A^2 .
- (2p) d) Să se arate că $A^2 = 5A + 6I_2$.
- (2p) e) Să se calculeze $f(1) + f(2) + \dots + f(20)$.
- (2p) f) Să se rezolve inecuația $\frac{f(x-1)}{x} \geq 0$, pentru $x \in \mathbf{R}^*$.
- (2p) g) Să se determine numerele $p, q \in \mathbf{R}$ astfel încât $A^4 = p \cdot A + q \cdot I_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră mulțimea $A = \mathbf{R} - \{-1, -2, -3\}$ și funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x+1)(x+2)(x+3), \quad g(x) = f'(x), \quad h(x) = g'(x) \text{ și } u : A \rightarrow \mathbf{R},$$

$$u(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $u'(x)$, $x \in A$.
- (4p) b) Să se arate că $g(x) = f(x) \cdot u(x)$, $\forall x \in A$.
- (4p) c) Să se arate că $u'(x) < 0$, $\forall x \in A$.
- (2p) d) Să se arate că $u'(x) = \frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)}$, $\forall x \in A$.
- (2p) e) Să se determine ecuația asymptotei către $+\infty$ la graficul funcției u .
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 u(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că $g^2(x) > h(x) \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Variantă 99

Subiectul I

- a) $AB = 5\sqrt{2}$.
- b) $a = 10$ și $b = 10$.
- c) $S = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.
- d) $\bar{z} = -4 + 9i$.
- e) $a = 1, b = -1$.
- f) $BC = \sqrt{73}$.

Subiectul II

1.

- a) $\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 2 & 30 \end{vmatrix} = -10$.
- b) $p = \frac{2}{5}$.
- c) $x = \frac{6}{5}$.
- d) $x = 8^3$.
- e) Prin algoritmul de împărțire, obținem restul $X + 1$.

2.

a) $f'(x) = -\frac{4}{x^5}, x \neq 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -4$.

c) $x = 0$ este asimptotă verticală.

d) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{31}{24}$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2} = 1$.

Subiectul III

- a) $f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$. Dar $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 3$.
- b) $\det(A) = -6$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}.$

d) $5A + 6I_2 = A^2.$

e) $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(20) = \sum_{k=1}^{20} f(k) = \sum_{k=1}^{20} (k^2 - 9) = \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{20} 9 =$
 $= \frac{20 \cdot (20+1)(2 \cdot 20+1)}{6} - 9 \cdot 20 = 2690.$

f) Inecuația devine $\frac{(x-4)(x+2)}{x} \geq 0$. Soluția este $x \in [-2, 0) \cup [4, \infty)$.

g) Din d) și folosind faptul că $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$ avem

$$A^4 = (5A + 6I_2)^2 = 125A + 150I_2 + 60A + 36I_2 = 185A + 186I_2.$$

Deci $p = 185$; $q = 186$.

Subiectul IV

a) $u'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2}, \forall x \in A.$

b) $f(x) \cdot u(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) =$
 $= (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) = f'(x) = g(x).$

c) $u'(x) = -\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} \right) < 0, \forall x \in A.$

d) Din punctul b) obținem $u(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \forall x \in A$. Atunci

$$u'(x) = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)} = \frac{h(x)f(x) - g^2(x)}{f^2(x)}, x \in A.$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$, deci $y = 0$ este ecuația asymptotei orizontale spre $+\infty$

f) $\int_0^1 u(x) dx = \ln(x+1) \Big|_0^1 + \ln(x+2) \Big|_0^1 + \ln(x+3) \Big|_0^1 = \ln 4.$

g) Avem $\frac{f(x)h(x) - g^2(x)}{f^2(x)} = u'(x) < 0, \forall x \in A = \mathbf{R} - \{-1, -2, -3\}$, rezultă

$$f(x)h(x) - g^2(x) < 0, \forall x \in \mathbf{R} - \{-1, -2, -3\}. \quad (1)$$

Pentru $x = -1$: $f(-1)h(-1) - g^2(-1) = 0 - g^2(-1) < 0$.

$x = -2$: $f(-2)h(-2) - g^2(-2) = 0 - g^2(-2) < 0$. Analog pentru $x = 3$.

Folosind (1) rezultă că relația dată este adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R}$.