

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
**Varianta ....098**

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**NOTĂ.**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A(-3, 3)$ ,  $B(-3, 0)$ ,  $C(0, 6)$  și  $D(-2, 2)$ .

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul  $A$  la punctul  $B$ .
- (4p) b) Să se determine  $m, n \in \mathbf{R}$  astfel încât punctele  $B$  și  $C$  să aparțină dreptei de ecuație  $y = mx + n$ .
- (4p) c) Să se demonstreze că punctele  $B$ ,  $C$  și  $D$  sunt coliniare.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului  $DEF$ , cu  $DE = 2$ ,  $DF = 3$  și  $m(\hat{D}) = 30^\circ$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\cos^4 45^\circ$ .
- (2p) f) Să se calculeze, în mulțimea numerelor complexe, numărul  $(1 - 2i)^2$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se calculeze numărul  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$ .
- (3p) b) Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , cu  $f(x) = 3x + 1$ , astfel încât funcția  $g$  este inversa funcției  $f$ . Să se calculeze  $g(4)$ .
- (3p) c) Să se determine suma coeficienților polinomului  $(X + 1)^4$ .
- (3p) d) Să se rezolve ecuația  $\lg(5x^2 + 1) = \lg(6x)$ ,  $x > 0$ .
- (3p) e) Să se rezolve ecuația  $x + 2 = 3\sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ .

2.

Se consideră funcția  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f(0)$ .
- (3p) b) Să se arate că  $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ ,  $\forall x > -1$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) e) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $[0, \infty)$ .

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2x$

și  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{de n ori}(x)$ , pentru orice  $n \in \mathbf{N}^*$ , unde „ $\circ$ ” reprezintă

operația de compunere a funcțiilor.

(4p) a) Să se calculeze  $f(1)$ .

(4p) b) Să se calculeze  $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$ .

(4p) c) Să se determine inversa funcției  $f$ .

(2p) d) Să se arate că  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = f\left(\frac{3}{2}\right)$ .

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $f_n(x) = 2^n x$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

(2p) f) Să se arate că  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & f(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

(2p) g) Să se arate că  $1 + f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + \dots + f_n(1) = 2^{n+1} - 1$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ .

(4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

(4p) b) Să se calculeze  $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x^2} dx$ .

(4p) c) Să se demonstreze că funcția  $f$  nu este monotonă pe  $\mathbf{R}$ .

(2p) d) Să se determine punctele de extrem ale funcției  $f$ .

(2p) e) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{f(x)}$ .

(2p) f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2^x}\right)$ .

(2p) g) Să se calculeze  $\int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{5}{3}} \frac{f(x) - f(-x)}{x^3} dx$ .

### Varianța 98

#### Subiectul I

- a)  $AB = 3$ .
- b)  $m = 2, n = 6$ .
- c)  $B, C$  și  $D$  sunt coliniare  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ , adevărat.
- d)  $S_{EDF} = \frac{3}{2}$ .
- e)  $\cos^4 45^\circ = \frac{1}{4}$ .
- f)  $(1-2i)^2 = -3-4i$ .

#### Subiectul II

1.

a)  $1+3+9+27+81+243=364$ .

b)  $g(4)=1$ .

c) suma coeficienților este  $2^4$ .

d)  $x_1=1$  și  $x_2=\frac{1}{5}$ .

e)  $x_1=1$  și  $x_2=4$ .

2.

a)  $f(0)=1$ .

b)  $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}, \forall x \in (-1, \infty)$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{4}$ .

d)  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} + \ln 2$ .

e)  $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \geq 0, \forall x \in [0, \infty)$ . Deci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $[0, \infty)$ .

#### Subiectul III

a)  $f(1)=2$ .

b)  $f(1)+f(2)+\dots+f(10)=2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot 10 = 110$ .

c) Arătăm că funcția  $f$  este bijectivă.

Injectivitatea:  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  cu  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ . Deci funcția  $f$  este injectivă.

Surjectivitatea:  $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}: f(x) = y$ .

$f(x) = y \Rightarrow 2x = y \Rightarrow \exists x = \frac{y}{2} \in \mathbf{R}$ . Deci funcția  $f$  este surjectivă.

Funcția  $f$  fiind injectivă și surjectivă este bijectivă.  
Dar  $f$  bijectivă  $\Leftrightarrow f$  inversabilă  $\Leftrightarrow \exists f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f^{-1}(y) = x$  pentru care  $f(x) = y$ .

Deducem că  $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ . Deci  $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ .

d)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 = f\left(\frac{3}{2}\right)$ .

e) Notăm  $P(n)$ :  $f_n(x) = 2^n x$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

$P(1)$ :  $f_1(x) = 2^1 x$  (A).

Presupunem  $P(k)$  propoziție adevărată și demonstrăm că  $P(k+1)$  este propoziție adevărată. Deci  $f_k(x) = 2^k x$ .

$$f_{k+1}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{(k+1) \text{ ori}}(x) = (f_k \circ f)(x) = f_k(f(x)) = 2^k f(x) = 2^k \cdot 2x = 2^{k+1} x.$$

Obținem că  $P(k+1)$  este adevărată. Folosind metoda inducției matematice rezultă că  $P(n)$  este o propoziție adevărată,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

f) Notăm  $P(n)$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & f(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

Evident  $P(1)$  este adevărată.

Presupunem  $P(k)$  propoziție adevărată și demonstrăm că  $P(k+1)$  este propoziție adevărată.

Deci  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & f(k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  este adevărată. Atunci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ adevărat.}$$

Din metoda inducției matematice rezultă că  $P(n)$  este adevărată,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

g)  $1 + f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_n(1) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$ .

#### Subiectul IV

a)  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbf{R}$ .

b)  $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x^2} dx = \int_1^2 3dx - 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left( 3x - 2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} - 2 \ln 2.$

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = 1$ . Deducem că  $f'(x) \geq 0, x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, \infty)$  și că  $f'(x) \leq 0, x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ . Deci  $f$  este crescătoare pe  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ , descrescătoare pe  $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ ;  $f$  crescătoare pe  $[1, \infty)$ . În concluzie funcția  $f$  nu e monotonă pe  $\mathbf{R}$ .

d) Din punctul c) deducem că  $x_1 = -\frac{1}{3}$  este punct de maxim local, iar  $x_2 = 1$  este punct de minim local.

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - x^2 - x - 2} = 0$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2^x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^{3x}} - \frac{1}{2^{2x}} - \frac{1}{2^x} - 2 \right) = -2$ .

g)  $f(x) - f(-x) = x^3 - x^2 - x - 2 - (-x^3 - x^2 + x - 2) = 2x^3 - 2x$ .

$$\int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} \frac{f(x) - f(-x)}{x^3} dx = \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} \left( 2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = \left( 2x + \frac{2}{x} \right) \Big|_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} = 2 \left( 5 - \frac{1}{5} \right) + 2 \left( \frac{1}{5} - 5 \right) = 0.$$