

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta097

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine partea reală a numărului complex $(\sqrt{3} + i)^2$.
- (4p) b) Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral cu lungimea laturii 5.
- (4p) c) Să se determine dreapta de ecuație $2x + ay = b$ care trece prin punctele $A(2,1)$ și $B(0,3)$.
- (4p) d) Să se calculeze numărul complex $1 + i^3 + i^6 + i^9 + i^{12}$.
- (2p) e) Să se determine raza cercului circumscris unui triunghi având lungimile laturilor 6, 8, 10.
- (2p) f) Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se rezolve ecuația $C_n^1 = 7$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
- (3p) b) Să se determine punctul de abscisă 3 situat pe graficul funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 4x - 3$.
- (3p) c) Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + a$, $f \in \mathbf{R}[X]$.Să se determine parametrul real a , astfel încât $x = 2$ să fie rădăcină a polinomului f .
- (3p) d) Se consideră pe \mathbf{R} legea de compozitie $x * y = x + y + 14$. Să se determine elementul neutru al legii *.
- (3p) e) Să se calculeze matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 27$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
- (3p) d) Să se rezolve în \mathbf{R} , ecuația $f'(x) + f(x) = 27$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimile $A = \{X^2 + aX + b \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ și $B = \{r \in \mathbf{R} \mid \exists f \in A \text{ astfel încât } f(r) = 0\}$

- (4p) a) Să se găsească un polinom $f \in A$, astfel încât $f(5) = 0$.
- (4p) b) Să se arate că $1 + \sqrt{3} \in B$.
- (4p) c) Să se arate că numerele $x_1 = m + n\sqrt{3}$ și $x_2 = m - n\sqrt{3}$, cu $m, n \in \mathbf{Z}$, sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2mx + m^2 - 3n^2 = 0$.
- (2p) d) Să se arate că $(2 - \sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$, unde $A_n, B_n \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $a \in B$ și $k \in \mathbf{Z}$, atunci $a + k \in B$.
- (2p) f) Să se demonstreze că $B \cap \left(0; \frac{1}{2007}\right) \neq \emptyset$.
- (2p) g) Să se arate că $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin B$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ și sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$,

$$a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n).$$

- (4p) a) Să se verifice că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{n^2}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\int_1^n f(x) dx - a_n + \frac{1}{2} \right)$.

Varianta 97

Subiectul I

- a) $\operatorname{Re}(z)=2$.
- b) $P=15$.
- c) $2x+2y=6$.
- d) $1+i^3+i^6+i^9+i^{12}=1$
- e) $R=5$.
- f) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1.

- a) $n=7$.
- b) punctul căutat este $A(3,9)$.
- c) $a=-18$.
- d) $e=-14$.
- e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

2.

- a) $f'(x)=3x^2$.
- b) $f'(x)=3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} .
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 12$.
- d) $x_1=x_2=0, x_3=-3$.
- e) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{109}{4}$.

Subiectul III

- a) $f=X^2-5X \in \mathbf{Z}[X]$ și $f(5)=0$.
- b) Fie $x_1=1+\sqrt{3}$ și $x_2=1-\sqrt{3}$. Atunci ecuația de gradul II care are soluțiile x_1 și x_2 este $x^2-2x-2=0$. Considerăm polinomul $f=X^2-2X-2$. Deci $f \in \mathbf{Z}[X]$ și $f(1+\sqrt{3})=0$, rezultă că $1+\sqrt{3} \in B$.
- c) $x_1+x_2=2m$; $x_1x_2=m^2-3n^2$. Ecuația de gradul II cu soluțiile x_1 și x_2 este $x^2-2mx+(m^2-3n^2)=0$
- d) Demonstrăm prin inducție matematică

Notăm $P(n)$: $(2 - \sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$, $A_n, B_n \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}^*$

Pentru $n = 1$ $P(1)$: $(2 - \sqrt{3})^1 = A_1 - B_1\sqrt{3}$ (A) pentru $A_1 = 2 \in \mathbf{Z}$, $B_1 = -1 \in \mathbf{Z}$

Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ propoziție adevărată.

Deci $(2 - \sqrt{3})^k = A_k - B_k\sqrt{3}$, $A_k, B_k \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^{k+1} &= (2 - \sqrt{3})^k(2 - \sqrt{3}) = (A_k - B_k\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = \\ &= (2A_k + 3B_k) - \sqrt{3}(A_k + 2B_k) = A_{k+1} - \sqrt{3}B_{k+1}, \text{ cu } A_{k+1} = 2A_k + 3B_k \in \mathbf{Z} \text{ și} \\ B_{k+1} &= A_k + 2B_k \in \mathbf{Z}. \text{ Deci } P(k+1) \text{ este propoziție adevărată.} \end{aligned}$$

Folosind metoda inducției matematice, rezultă că $P(n)$ este propoziție adevărată, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

e) Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $f(a) = 0$. Considerăm g astfel încât $g(x) = f(x - k)$. Rezultă că $g \in \mathbf{Z}[X]$ și $g(a + k) = f(a) = 0$. Prin urmare $a + k \in B$.

f) Fie $x_1 = 2 - \sqrt{3}$. Din punctul c) rezultă că $x_1 \in B$.

Folosind punctul d) și e) rezultă $x_1^n \in B$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Rezultă că $(2 - \sqrt{3})^{11} \in B$.

$$\text{Dar } (2 - \sqrt{3})^{11} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{11}} < \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048} < \frac{1}{2007}.$$

$$\text{Deci } x_1^{11} \in B \cap \left(0, \frac{1}{2007}\right).$$

g) Presupunem contrariul $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in B$, deci există $f = x^2 + ax + b \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$. Rezultă $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + b = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= -b - 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow a^2(5 + 2\sqrt{6}) = b^2 + (5 + 2\sqrt{6})^2 + 2b(5 + 2\sqrt{6}) \Rightarrow \\ \Rightarrow 5a^2 + 2a^2\sqrt{6} &= b^2 + 49 + 10b + \sqrt{6}(20 + 4b). \end{aligned}$$

$$\text{Obținem } \begin{cases} 5a^2 = b^2 + 49 + 10b \\ 2a^2 = 20 + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 10 + 2b \\ b^2 = 1 \end{cases}.$$

Dacă $b = 1 \Rightarrow a^2 = 12$ (fals). Dacă $b = -1 \Rightarrow a^2 = 8$ (fals), deoarece $a \in \mathbf{Z}$.

Deci presupunerea făcută este falsă.

Subiectul IV

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = +\infty \Rightarrow x = 0$ este asimptota verticală.

b) $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right)' = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}, \forall x \in (0, \infty).$

c) $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1.$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n^2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(n+1)^2}} = e^{-1}.$

f) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^2 (x^{-2} - (x+1)^{-2}) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right]_1^2 = \frac{1}{3}.$

g) $\int_1^n f(x) dx = \int_1^n \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^n (x^{-2} - (x+1)^{-2}) dx =$

$$= \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right]_1^n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Atunci } \int_1^n f(x) dx - a_n + \frac{1}{2} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{n(n+1)^2}$$

Atunci limita cerută este $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3}{n(n+1)^2} = -1.$