

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianța ...096

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(3, 8)$ la punctul $B(-2, 3)$.
- (4p) b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(3 + 2i)(1 - 4i) = a + bi$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{11}$.
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex $-9 - 5i$.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(3, 8)$ și $B(-2, 3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC , $AB = 12$, $AC = 5$ și $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$, să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 30 & 3 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $4^n \geq 25$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $125^x - 25 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația $\log_{10} x = 10$.
- (3p) e) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^6 - X^3 + 1$ la polinomul $g = X^2 - X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + \frac{1}{x^5}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^5 + 1) \cdot f(n))$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și funcția

$$f : \left(\frac{1}{2}, \infty \right) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \infty \right), f(x) = \frac{5x-2}{8x-3} .$$

- (4p) a) Să se verifice că $A + I_2 = B$.
- (4p) b) Să se arate că $A^2 = O_2$.
- (4p) c) Să se calculeze matricea B^2 .
- (2p) d) Să se arate că, dacă $x > \frac{1}{2}$, atunci $\frac{5x-2}{8x-3} > \frac{1}{2}$.
- (2p) e) Să se calculeze $(f \circ f)(x)$, $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty \right)$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $B^n = I_2 + nA$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{de n ori f}(x) = \frac{(4n+1)x-2n}{8nx+1-4n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră mulțimea $A = \mathbf{R} - \{0, -1, +1\}$ și funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x(x^2 - 1), g(x) = f'(x), h(x) = g'(x) \text{ și } u : A \rightarrow \mathbf{R} ,$$

$$u(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} .$$

- (4p) a) Să se calculeze $u'(x)$, $x \in A$.
- (4p) b) Să se arate că $g(x) = f(x) \cdot u(x)$, $\forall x \in A$.
- (4p) c) Să se arate că $u'(x) < 0$, $\forall x \in A$.
- (2p) d) Să se arate că $u'(x) = \frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)}$, $\forall x \in A$.
- (2p) e) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției u .
- (2p) f) Să se calculeze $\int_4^5 u(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că $g^2(x) > h(x) \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 096**Subiectul I**

- a) $AB = 5\sqrt{2}$.
- b) $a = 11, b = -10$.
- c) $S = \frac{11\sqrt{3}}{4}$.
- d) $\bar{z} = -9 + 5i$
- e) $a = -1, b = 5$.
- f) $BC = 13$.

Subiectul II

1.

- a) $\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 30 & 3 \end{vmatrix} = -30$.
- b) $p = \frac{3}{5}$.
- c) $x = \frac{2}{3}$.
- d) $x = 10^{10}$.
- e) Prin aplicarea algoritmului de împărțire obținem restul 3.

2.

- a) $f'(x) = -\frac{5}{x^6}, x \neq 0$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -5$.
- c) ecuația asymptotei către $-\infty$ la graficul funcției f este $y = 3$.
- d) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{207}{64}$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^5 + 1) \cdot f(n)) = \infty$.

Subiectul III

- a) $A + I_2 = B$.
- b) Prin calcul rezultă că $A^2 = O_2$.

- c) $B^2 = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}.$
- d) $\frac{5x-2}{8x-3} - \frac{1}{2} = \frac{2x-1}{2(8x-3)} > 0, \forall x > \frac{1}{2}.$
- e) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{5f(x)-2}{8f(x)-3} = \frac{9x-4}{16x-7}$

f) Notăm $P(n): B^n = I_2 + nA, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Pentru $n=1$ obținem $B^1 = I_2 + A$, adevărat din punctul a).

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$$\begin{aligned} \text{Dar } B^{k+1} &= B^k \cdot B = (I_2 + kA)B \stackrel{a)}{=} (I_2 + kA)(I_2 + A) = I_2 + kA + A + kA^2 \\ &\stackrel{b)}{=} I_2 + kA + A = I_2 + (k+1)A. \end{aligned}$$

Deci $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $\forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = I_2 + nA.$

g) Demonstrăm prin inducție, relația cerută.

$$P(n): \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{(4n+1)x - 2n}{8nx + 1 - 4n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$$\begin{aligned} \text{Dar } \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k+1 \text{ ori } f}(x) &= \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k \text{ ori } f}(f(x)) = \frac{(4k+1)f(x) - 2k}{8kf(x) + 1 - 4k} \\ &= \frac{(4k+5)x - 2k - 2}{8(k+1)x - 4k - 3}. \text{ Deci } P(k+1) \text{ este adevărată.} \end{aligned}$$

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{(4n+1)x - 2n}{8nx + 1 - 4n}.$$

Subiectul IV

- a) $u'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}, \forall x \in A.$
- b) $f(x) \cdot u(x) = x(x^2 - 1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) = x^2 - 1 + x(x+1) + x(x-1)$
 $= 3x^2 - 1 = f'(x) = g(x).$

c) $u'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in A.$

d) Din b) rezultă că

$$u(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \Rightarrow u'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{h(x)f(x) - g^2(x)}{f^2(x)}, \forall x \in A.$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) = 0$, deci ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției u este $y = 0$.

f) $\int_4^5 u(x) dx = [\ln x + \ln(x-1) + \ln(x+1)]_4^5 = \ln 5 - \ln 4 + \ln 4 - \ln 3 + \ln 6 - \ln 5 = \ln 2$

g) Din punctul d) avem $u'(x) = \frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)} < 0, \forall x \in A$. Rezultă $f(x) \cdot h(x) < g^2(x), \forall x \in R - \{0, -1, 1\}$. Pentru $x = 0, x = 1, x = -1$ se verifică prin calcul.