

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta095

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$ $A(-8,-6)$, $B(8,6)$, $C(-6,8)$.

- (4p) a) Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului (AB) .
- (4p) b) Să se arate că $OA = OB = OC$.
- (4p) c) Să se calculeze lungimea segmentului (AC) .
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se calculeze $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ$.
- (2p) f) Să se calculeze, în mulțimea numerelor complexe, numărul $(8+6i)(6+8i)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se rezolve în \mathbf{R}^* ecuația $\log_2(x^2) = 2$.
- (3p) b) Să se calculeze $2 \cdot C_3^2 - 3^2$.
- (3p) c) Să se calculeze primul termen al dezvoltării $(3x+2)^3$.
- (3p) d) Să se determine câte numere $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ verifică inegalitatea $n^2 - 4n + 3 \leq 0$.
- (3p) e) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x+2=x^2$.

2.

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 5x^4 + 2$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-7}{x-1}$.
- (3p) d) Să se determine punctul de extrem al funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricele $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4p) a) Să se calculeze determinantul matricei B .

(4p) b) Să se arate că $A^3 = O_3$.

(4p) c) Să se arate că $AB = BA = I_3 - B$.

(2p) d) Să se calculeze $(A + I_3) \cdot B$.

(2p) e) Să se demonstreze că $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$.

(2p) f) Să se calculeze $2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 11A^{10}$.

(2p) g) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $(I_3 + A)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$.

(4p) a) Să se calculeze $f(1) + f(2)$.

(4p) b) Să se arate că $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$, $x > 0$.

(4p) c) Să se calculeze $\int_1^{e-1} x \cdot f'(x) dx$.

(2p) d) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

(2p) f) Să se calculeze $\int_1^e \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \right) dx$

(2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n}$.

Varainta 95

Subiectul I

- a) Coordonatele punctului M , mijlocul segmentului $[AB]$, sunt $x_M = 0$, $y_M = 0$.
- b) $OA = 10$, $OB = 10$, $OC = 10$.
- c) $AC = 10\sqrt{2}$.
- d) $S_{ABC} = 100$.
- e) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{3}{2}$.
- f) $z = 100i$.

Subiectul II

1.

- a) $x \in \{-2, 2\}$.
- b) $2 \cdot C_3^2 - 3^2 = -3$.
- c) primul termen al dezvoltării este $27x^3$.
- d) 3 numere.
- e) $x \in \{-1, 2\}$.

2.

- a) $f(1) = 7$.
- b) $f'(x) = 20x^3$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 7}{x - 1} = 20$.
- d) $x = 0$ este punct de minim local.
- e) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 6$.

Subiectul III

- a) $\det B = 1$.
- b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O_3$.
- c) $AB = BA = I_3 - B$.
- d) $(A + I_3) \cdot B = AB + B = I_3 - B + B = I_3$.
- e) Prin calcul obtinem $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1 \cdot 1 = 1$.

f) Din punctul b) rezultă $A^k = O_3, \forall k \geq 3$.

$$\text{Atunci } 2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 11A^{10} = 2A + 3A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g) Considerăm $P(n): (I_3 + A)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$.

Evident $P(1)$ este adevărată.

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$$\begin{aligned} \text{Dar } (I_3 + A)^{k+1} &= (I_3 + A)^k (I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k+1 & k^2 + 2k + 1 \\ 0 & 1 & 2+2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & (k+1)^2 \\ 0 & 1 & 2(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deci $P(k+1)$ este adevărată. Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul IV

a) $f(1) + f(2) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} = \ln \left(2 \cdot \frac{3}{2} \right) = \ln 3$.

b) $f'(x) = \left(\ln \frac{x+1}{x} \right)' = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{x(x+1)}, x > 0$.

c) $\int_1^{e-1} x \cdot f'(x) dx \stackrel{b)}{=} - \int_1^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = -\ln(x+1) \Big|_1^{e-1} = \ln 2 - 1$.

d) Din punctul b) rezultă că $f'(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe $(0, \infty)$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x} = \ln 1 = 0$.

f) $f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \ln \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x}} - \ln \frac{x+1}{x} = \ln \left((x+1) \frac{x}{x+1} \right) = \ln x, \forall x > 0.$

Atunci $\int_1^e \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \right) dx = \int_1^e \ln x \, dx = (x \ln x)|_1^e - \int_1^e dx = (x \ln x)|_1^e - x|_1^e = 1.$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n}}{n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \right)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0.$