

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
***Varianta ....093***

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul  $A(9, -4)$  la punctul  $B(-4, 9)$ .
- (4p) b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât să avem egalitatea de numere complexe  $(4 + 5i)(1 - 2i) = a + bi$ .
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime  $\sqrt{13}$ .
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex  $-7 + 8i$ .
- (2p) e) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât punctele  $A(9, -4)$  și  $B(-4, 9)$  să fie pe dreapta de ecuație  $x + ay + b = 0$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $BC$ ,dacă în triunghiul  $ABC$ ,  $AB = 6$ ,  $AC = 12$  și  $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} -1 & 20 \\ -3 & 30 \end{vmatrix}$ .
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $4^n \leq 23$ .
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale , ecuația  $25^x - 625 = 0$ .
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive , ecuația  $\log_2 x = 2$ .
- (3p) e) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $f = X^6 + 2X^3 + 1$  la polinomul  $g = X^2 + X + 1$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției  $f$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\int_1^2 f(x)dx$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ .

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

***Varianta 093***

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $A = \{2^i \cdot 5^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $1 \in A$ ,  $2 \in A$ ,  $5 \in A$  și  $4 \in A$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $3 \notin A$  și  $7 \notin A$ .
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ ,  
 $\forall a \in \mathbf{R} - \{1\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- (2p) d) Să se arate că  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} < 2$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .
- (2p) e) Să se arate că  $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^s} < \frac{5}{4}$ ,  $\forall s \in \mathbb{N}$ .
- (2p) f) Să se calculeze numărul de elemente din mulțimea  $A \cap \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  și oricare ar fi numerele naturale distincte  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ,  
avem  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{5}{2}$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x(x^2 - 1)$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $f(x) = x^3 - x$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuația  $f'(x) = 0$ .
- (2p) d) Să se arate că funcția  $f$  are un punct de maxim local și un punct de minim local.
- (2p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (2p) f) Să se verifice identitatea  $f'(x) = \frac{1}{2}((f'(x))^2 + f'(x) + 1) - \frac{1}{2}((f'(x))^2 - f'(x) + 1)$ ,  
 $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se arate că există funcții  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ ,  
astfel încât să avem egalitatea  $f(x) = g(x) - h(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

**Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările**

**Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale**

**Varianta 093**

### Varianta 093

#### Subiectul I

a)  $AB = \sqrt{13^2 + 13^2} = 13\sqrt{2}$

b)  $(4+5i)(1-2i) = a+bi \Leftrightarrow 4+10-8i+5i = a+bi \Leftrightarrow 14-3i = a+bi \Leftrightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=-3 \end{cases};$

c) Aria cerută este  $\frac{13\sqrt{3}}{4};$

d)  $z = -7 + 8i \Rightarrow \bar{z} = -7 - 8i$

e) Se obține sistemul  $\begin{cases} 9-4a+b=0 \\ -4+9a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases}$

f) Cu teorema lui Pitagora  $BC = \sqrt{36+144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

#### Subiectul II:

1.

a)  $\begin{vmatrix} -1 & 20 \\ -3 & 30 \end{vmatrix} = -30 + 60 = 30;$

b) Deoarece numai 1 și 2 verifică inegalitatea, probabilitatea cerută este  $\frac{2}{5};$

c)  $25^x - 625 = 0 \Leftrightarrow 25^x = 25^2 \Leftrightarrow x = 2;$

d)  $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4;$

e) Prin împărțire se obține câtul  $X^4 - X^3 + 3X - 3$  și restul 4;

2.

a)  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, (\forall)x \in \mathbf{R}^*;$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -1$

c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ , iar  $f$  continuă pe  $\mathbf{R}^*$ ; deci  $x = 0$  singura asimptotă verticală;

d)  $\int_1^2 f(x) dx = (2x + \ln x) \Big|_1^2 = 4 + \ln 2 - 2 = 2 + \ln 2;$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = 2;$

#### Subiectul III

a)  $1 = 3^0 \cdot 5^0; 3 = 3^1 \cdot 5^0; 5 = 3^0 \cdot 5^1; 9 = 3^2 \cdot 5^0$

b) Presupun că  $2 \in A \Rightarrow (\exists)i, j \in \mathbf{N}$  cu  $2 = 3^i \cdot 5^j$  fals căci membrul stâng e par iar membrul drept impar; Pentru 7 obțin  $7 = 3^i \cdot 5^j$  cu  $i, j \in \mathbf{N}$ . Dacă  $i, j \in \{0\}$  evident fals, iar pentru  $i, j \in \mathbf{N}^*$  fals deoarece 7 nu e multiplu de 3(sau 5)

c) Pentru  $n = 0$  evident  $1 = \frac{1-a}{1-a}$ ; presupun  $1+a+\dots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  si am

$$1+a+\dots+a^n+a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

$$\text{d) Membrul stâng se scrie } \frac{1-\frac{1}{3^{k+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right) < \frac{3}{2}$$

$$\text{e) Membrul stâng este } \frac{1-\frac{1}{5^{s+1}}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5^{s+1}}\right) < \frac{5}{4}$$

f) Evident  $A \cap \{1,2,3,\dots,20\} = \{1,3,5,9,15\}$ ; Răspuns 5

g) Folosind punctele d) si e) obtin că  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}\right)\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{5^k}\right) < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$

Subiectul IV:

a)  $f'(x) = 3x^2 - 1, (\forall)x \in \mathbf{R}$  ;

b) Evident;

$$\text{c) } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

d) Construim tabelul de variație pentru  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'$	+	0	-	0
$f$				

Din tabel se vede că  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  este punct de maxim local și  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  este punct de minim local

$$\text{e) } \int_0^1 f(x)dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

f) Prin calcul direct

g) Exemplu: definesc  $g, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $h(x) = x$ , ambele strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$  și  $f(x) = g(x) - h(x), (\forall)x \in \mathbf{R}$