

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta091

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze aria unui triunghi cu lungimile laturilor 2, 5 și 6.
- (4p) b) Să se calculeze $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3,2)$ și $B(3,-2)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (4p) c) Să se verifice că dreptele de ecuații $2x + y - 1 = 0$ și $2x + y - 7 = 0$ sunt paralele.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{13}{2-3i} = a + bi$.
- (2p) e) Să se calculeze valoarea expresiei $E = \sin 30^\circ - \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$.
- (2p) f) Să se verifice dacă punctul $A(1,1)$ este situat pe dreapta de ecuație $2x - 2y = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se rezolve inecuația $x^2 - 4 < 0$.
- (3p) b) Să se determine probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1,2,\dots,30\}$ să fie par.
- (3p) c) Să se determine câtul împărțirii polinomului $f = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$ la polinomul $X^2 - 3X + 1$.
- (3p) d) Să se precizeze dacă punctul $A(-1,6)$ este situat pe graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 7$.
- (3p) e) Să se rezolve, în \mathbb{R} , ecuația $(x-1)(x^2 - 3x + 2) = 0$
- 2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 7$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{4x^3}$.
- (3p) d) Să se rezolve, în \mathbb{R} , ecuația $f'(x) = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numerele rationale $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, definite prin $a_1 = 4$, $a_2 = 8$, și

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se determine numerele a_3 , a_4 , a_5 și a_6 .
- (4p) b) Să se verifice că $a_1 = a_7$ și $a_2 = a_8$.
- (4p) c) Să se arate că $a_{n+6} = a_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) d) Să se determine numărul a_{2007} .
- (2p) e) Să se determine câte elemente din sirul de numere $a_1, a_2, \dots, a_{2007}$ sunt egale cu 2.
- (2p) f) Să se calculeze suma $a_1 + a_2 + \dots + a_{2007}$.
- (2p) g) Să se calculeze produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2007}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- (4p) a) Să se determine ecuația asymptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $f(-1)$, $f(1)$, $f'(-1)$ și $f'(1)$.
- (2p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (2p) e) Să se arate că $-1 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se arate că, dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $f(x) + f(y) = 2$, atunci $x = y = 1$.
- (2p) g) Dacă $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției f , să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\ln(x^2)}$.

Varianta 91

SUBIECTUL I

- a) $S = \frac{3\sqrt{39}}{4}$.
- b) $a = 0$ și $b = -3$.
- c) $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-7}$, de unde rezultă că dreptele sunt paralele.
- d) $\frac{13}{2-3i} = 2+3i$.
- e) $E = 1$.
- f) Punctul A aparține dreptei d: $2x - 2y = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (A).

SUBIECTUL II

1.

- a) $x \in (-2, 2)$.
- b) $p = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.
- c) Efectuând împărțirea obținem câtul $X^2 + X + 3$.

d) $A(-1, 6) \in G_f \Leftrightarrow 6 = f(-1)$.

e) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$

2.

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 8$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{4x^3} = \frac{1}{4}$.

d) $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$.

e) $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{67}{12}$.

SUBIECTUL III

a) $a_3 = \frac{a_2}{a_1} = 2, a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{8}$ și $a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{2}$.

- b)** $a_7 = \frac{a_6}{a_5} = 4$ și $a_8 = \frac{a_7}{a_6} = 8$.
- c)** $a_{n+6} = \frac{a_{n+5}}{a_{n+4}} = \frac{a_{n+4} \cdot a_{n+2}}{(a_{n+3})^2} = \frac{1}{a_{n+3}} \Rightarrow a_{n+3} = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_{n+6} = a_n$.
- d)** Folosind **c)** avem că $a_{n+6k} = a_n, \forall n, k \in \mathbb{N}$. Deci $a_{2007} = a_{3+2004} = a_{3+6 \cdot 334} = a_3 = 2$.
- e)** Folosind **c)** și **d)** avem că: $a_3 = a_9 = \dots = a_{2007} = 2$. Deci sunt 335 elemente egale cu 2.
- f)** $a_1 + a_2 + \dots + a_{2007} = (a_1 + a_2 + \dots + a_6) + (a_7 + a_8 + \dots + a_{12}) + \dots + (a_{1999} + a_{2000} + \dots + a_{2004}) + a_{2005} + a_{2006} + a_{2007} = 334(a_1 + a_2 + \dots + a_6) + a_1 + a_2 + a_3 = \frac{19929}{4}$.
- g)** $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2007} = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_6)(a_7 \cdot a_8 \cdot \dots \cdot a_{12}) \dots (a_{1999} \cdot a_{2000} \cdot \dots \cdot a_{2004}) \cdot a_{2005} \cdot a_{2006} \cdot a_{2007} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 64$.

SUBIECTUL IV

- a)** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.
- b)** $f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$.
- c)** $f(-1) = -1, f(1) = 1, f'(-1) = 0$ și $f'(1) = 0$.
- d)** $\int_0^1 f(x) dx = \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \ln 2$.
- e)** $-1 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq (x+1)^2 \\ 0 \leq (x-1)^2 \end{cases}$ Relații care sunt adevărate $\forall x \in \mathbb{R}$.
- f)** Din **e)** $\Rightarrow f(x) \leq 1$ și $f(y) \leq 1$ de unde folosind relația $f(x) + f(y) = 2 \Rightarrow f(x) = f(y) = 1 \Rightarrow x = y = 1$.
- g)** $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + C$, deci $F(x)$ este de forma $F(x) = \ln(1+x^2) + c$.
Rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$. Atunci
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\ln(x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{(2 \ln x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$