EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D/F

***Varianta* ….090**

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările
Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale
NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,-7)$ la punctul $B(-7,3)$.

(4p) **b)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(7+3i)(1-2i)=a+bi$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6.

(4p) **d)** Să se determine conjugatul numărului complex $-2-5i$.

(2p) **e)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3,-7)$ și $B(-7,3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **f)** Să se calculeze BC ,dacă în triunghiul ABC, $AB=8$, $AC=10$ și $m\left(\widehat{BAC}\right)=90^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}-10 & -2\\ -30 & -3\end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $n!\le 25$.

(3p) **c)** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale , ecuația $16^x=32$.

(3p) **d)** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive , ecuația $\log_2 x=3$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma coeficienților polinomului $f=X^6-2X^3+1$, $f\in\mathbf{R}[X]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$, $f(x)=10+\dfrac{1}{x^{10}}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}^*$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **c)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - 4I_2$.

(4p) **a)** Să se calculeze determinantul matricei A și determinantul matricei B.

(4p) **b)** Să se arate că $A^2 = 12A$.

(4p) **c)** Să se calculeze $B(B - 4I_2)$.

(2p) **d)** Să se arate că $\det(C) \cdot \det(D) = \det(C \cdot D)$, pentru orice $C, D \in M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **e)** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$, $x, y \in \mathbf{R}$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducției matematice ,să se demonstreze că $A^n = 12^{n-1} \cdot A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Se consideră $G = \{A^n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$. Să se arate că G este infinită.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x(x^2 - 3x + 2)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se rezolve, în $\mathbf{R}$, ecuația $f'(x) = 0$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția f are un punct de maxim local şi un punct de minim local .

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(2p) **f)** Să se verifice identitatea $f'(x) = \frac{1}{2}\left((f'(x))^2 + f'(x) + 1\right) - \frac{1}{2}\left((f'(x))^2 - f'(x) + 1\right)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că există funcțiile $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea $f(x) = g(x) - h(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 90

SUBIECTUL I

a) $AB = 10\sqrt{2}$.
b) $a = 13$ şi $b = -11$.
c) $S = 9\sqrt{3}$.
d) $\bar{z} = -2 + 5i$.
e) $a = 1$ şi $b = 4$.
f) $BC = 2\sqrt{41}$.

SUBIECTUL II

1.
a) $\det(A) = -30$.
b) $p = \frac{4}{5}$.
c) $x = \frac{5}{4}$.
d) $x = 8$.
e) Suma coeficienților polinomului f este $S = 0$.

2.
a) $f'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$.
b) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -10$.
c) $x = 0$ este asimptotă verticală.
d) $\int_1^2 f(x)dx = 10 - \frac{1}{9 \cdot 2^9} + \frac{1}{9}$.
e) $\lim_{n \to \infty} f(n) = 10$

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0$, iar $\det(B) = -32$.
b) $A^2 = 12A$.
c) $B(B - 4I_2) = A^2 - 12A + 32I_2 = 32I_2$.
d) Fie $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} e & f \\ g & i \end{pmatrix}$, atunci $C \cdot D = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bi \\ ce + dg & cf + di \end{pmatrix}$ de unde $\det(C \cdot D) = aecf + aedi + bgcf + bgdi - afce - afdg - bice - bidg =$ $aedi + bgcf - afdg - bice = (ad - bc)(ei - gf) = \det(C) \cdot \det(D)$.

e) Soluția sistemului este $x = 0$ şi $y = 0$.

f) Fie $P(n): A^n = 12^{n-1} A$, n∈**N***.

$P(1): A = A$,(A).

Presupunem $P(k)$ (A) si demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde k≥1.

$P(k): A^k = 12^{k-1} A$, iar $P(k+1): A^{k+1} = 12^k A$.

Dar : $A^{k+1} = A^k \cdot A = 12^{k-1} A \cdot A = 12^{k-1} A^2 \overset{b)}{=} 12^k A$.

De unde $P(n)$ este (A) ∀n∈**N***.

g) Presupunem că mulțimea G este finită atunci $\exists k, p \in \mathbf{N}$, $k \neq p$ dar

$A^k = A^p \overset{f)}{\Leftrightarrow} 12^{k-1} A = 12^{p-1} A \Leftrightarrow 12^{k-1} = 12^{p-1} \Leftrightarrow k = p$ (F). Deci presupunerea făcută este falsă rezultă mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

b) Calcul direct.

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0,\quad \Delta = 12 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

d) $f'(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ şi $f'(x) < 0, \forall x \in \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Rightarrow$ punctul $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ este un punct de maxim local, iar punctul $x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ este un punct de minim local.

e) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx - 3\int_0^1 x^2 dx + 2\int_0^1 x dx = \frac{1}{4}$.

f) Calcul direct.

g) Din **f)** $\Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{2}\left((f'(t))^2 + f'(t) + 1\right) - \dfrac{1}{2}\left((f'(t))^2 - f'(t) + 1\right), \forall t \in \mathbf{R}$.

Integrând obținem că:

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left((f'(t))^2 + f'(t) + 1\right)dt - \int_0^x \frac{1}{2}\left((f'(t))^2 - f'(t) + 1\right)dt.$$

Notăm $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}\left((f'(t))^2 + f'(t) + 1\right)dt \overset{not}{=} g(x)$ şi $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{2}\left((f'(t))^2 - f'(t) + 1\right)dt = h(x)$. Obținem că $f(x) - f(0) = g(x) - h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - h(x)$ unde funcțiile h şi g sunt strict crescătoare deoarece derivatele lor sunt pozitive $\forall x \in \mathbf{R}$.