

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta089

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze aria triunghiului ABC , cu $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(0, 4)$.
- (4p) b) Să se calculeze numărul $4 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3}$.
- (4p) c) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(0, 3)$ și $B(5, 0)$ să aparțină dreptei de ecuație $y = mx + n$.
- (4p) d) Să se calculeze partea reală a numărului complex $(1 - i)^2$.
- (2p) e) Să se calculeze aria unui dreptunghi cu lungimea 4 și cu lățimea 3.
- (2p) f) Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2, 3)$ și este paralelă cu axa Ox .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se afle câte numere de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$.
- (3p) b) Să se calculeze C_5^2 .
- (3p) c) Să se calculeze 5% din 20.
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element n al mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n! < 5$.
- (3p) e) Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
- (3p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) e) Să se arate că $f(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$, se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și legea de

compoziție $X \circ Y = X + Y - 2I_2$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{R})$.

- (4p) a) Să se calculeze A^2 .
- (4p) b) Să se calculeze $A \circ A$.
- (4p) c) Să se arate că $X \circ Y = Y \circ X$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) d) Să se arate că $(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z)$, $\forall X, Y, Z \in M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) e) Să se arate că $X \circ (2I_2) = X$, $\forall X \in M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - 2(n-1)I_2, \quad \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2,$$

$$\forall X_1, X_2, \dots, X_n \in M_2(\mathbf{R}).$$
- (2p) g) Să se arate că legea "◦" determină o structură de grup pe mulțimea $M_2(\mathbf{R})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră sirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $f_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, cu $f_0(x) = \ln(x+1)$

și $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in (-1, \infty)$.

- (4p) a) Să se calculeze $f_0(0)$.
- (4p) b) Să se determine $f_1(x)$, $x \in (-1, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că $x = 0$ este soluție a ecuației $f_0(x) = x$.
- (2p) d) Să se arate că $f_0(x) \leq x$, $\forall x \in (-1, \infty)$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
 $\forall x \in (-1, \infty)$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{f_2(1)}{1!} + \frac{f_3(1)}{2!} - \frac{f_4(1)}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{f_n(1)}{(n-1)!} \right)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 89

SUBIECTUL I

- a) $S_{ABC} = 5$.
- b) $4 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3} = 1$.
- c) $m = -\frac{3}{5}$ și $n = 3$.
- d) partea reală este zero.
- e) $S = 12$.
- f) $d : y - 3 = 0$.

SUBIECTUL II

1.

- a) Numărul numerelor este: $A_3^2 = 6$.
- b) $C_5^2 = 10$.
- c) 5% din 20 este numărul 1.
- d) $p = \frac{2}{5}$.
- e) $\det(A) = -1$.
- 2.
- a) $f(0) = 1$.
- b) $f'(x) = e^x - 1$.
- c) $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$.
- d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- e) Punctul A(0, 1) este punct de minim global al funcției $f \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1$.

SUBIECTUL III

- a) $A^2 = I_2$.
- b) $A \circ A = A + A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.
- c) $X \circ Y = X + Y - 2I_2 = Y \circ X$, de unde $X \circ Y = Y \circ X$, $\forall X, Y \in M_2(\mathbb{R})$.
- d) $(X \circ Y) \circ Z = (X + Y - 2I_2) \circ Z = X + Y + Z - 4I_2$
 $X \circ (Y \circ Z) = X \circ (Y + Z - 2I_2) = X + Y + Z - 4I_2$ de unde
 $(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z)$, $\forall X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$.

e) $X \circ (2I_2) = X \Leftrightarrow X + 2I_2 - 2I_2 = X \Leftrightarrow X = X$.

f) Fie $P(n): X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - 2(n-1)I_2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$$P(2): X_1 \circ X_2 = X_1 + X_2 - 2I_2 \text{ (A).}$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_k = (X_1 + X_2 + \dots + X_k) - 2(k-1)I_2, \text{ iar}$$

$$P(k+1): X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_{k+1} = (X_1 + X_2 + \dots + X_{k+1}) - 2kI_2. \text{ Dar}$$

$$X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_{k+1} = (X_1 \circ X_2 \circ \dots \circ X_k) \circ X_{k+1} =$$

$$((X_1 + X_2 + \dots + X_k) - 2(k-1)I_2) \circ X_{k+1} = (X_1 + X_2 + \dots + X_k + X_{k+1}) - 2kI_2.$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- g) Din d) legea este asociativă, din c) și e) $2I_2$ este elementul neutru al legii, iar simetricul elementului $X \in M_2(\mathbf{R})$ este $4I_2 - X \in M_2(\mathbf{R})$, de unde $(M_2(\mathbf{R}), \circ)$ este grup (comutativ).

SUBIECTUL IV

a) $f_0(0) = \ln 1 = 0$.

b) $f_1(x) = f_0'(x) = (\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1}$.

c) Folosind a) rezultă că $x=0$ este soluție a ecuației $f_0(x) = x$

d) $f_0(x) \leq x \Leftrightarrow \ln(x+1) - x \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$ unde funcția $g: (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definită

prin $g(x) = \ln(1+x) - x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}$. Deci $g'(x) > 0, \forall x \in (-1, 0)$ și

$g'(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$ de unde rezultă ca punctul A(0, 0) este punct de maxim global

$\Rightarrow g(x) \leq g(0) = 0 \Leftrightarrow f_0(x) \leq x, \forall x \in (-1, \infty)$.

e) Fie $P(n): f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(1): f_1(x) = \frac{1}{x+1}, \text{ (A).}$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): f_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \text{ iar } P(k): f_{k+1}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} \text{ dar}$$

$$f_{k+1}(x) = f_k'(x) = \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \right)' = (-1)^{k-1}(k-1)!(-k)(x+1)^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} \text{ (A).}$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f) $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx = \int_0^1 (f_n(x))' dx = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n} - (-1)^{n-1}(n-1)!.$

g) Calculăm expresia $(-1)^{n-1} \frac{f_n(1)}{(n-1)!} \stackrel{e)}{=} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n(n-1)!} = \frac{1}{2^n}$. Atunci suma cerută

este: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} = 1 \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}$. Deci limita cerută

este $\frac{3}{2}$.