

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta088

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ la punctul $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- (4p) b) Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ și $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos x$ dacă $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex $z = -1 - 2i$.
- (2p) e) Să se calculeze suma de numere complexe $i + i^2 + i^3 + i^4$.
- (2p) f) Să se afle aria triunghiului ABC , dacă $m(B\hat{A}C) = 90^\circ$, $m(A\hat{C}B) = 30^\circ$ și $BC = 6$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{vmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element n al mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n^3 > 20$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $9^x - 3 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$, $x > 0$.
- (3p) e) Să se calculeze expresia $E = A_6^2 - A_6^4 + A_6^6$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(2) + f(3) + f(4)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei verticale a funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție " \circ " definită prin

$$x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $(-1) \circ 2$.
- (4p) b) Să se verifice că $x \circ y = 2(x+1)(y+1)-1, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, cu proprietatea $a \circ b \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se arate că, dacă $x \circ y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.
- (2p) f) Să se arate că $(-2004) \circ (-2003) \circ \dots \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2003 \circ 2004 < 0$.
- (2p) g) Să se arate că $\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de\ n\ ori\ a} = 2^{n-1}(a+1)^n - 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall a \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x), \quad x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) e) Să se arate că dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (2p) g) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f(11x) + f(1984x) = f(21x) + f(2004x)$.

Varianta 088

SUBIECTUL I

a) 1.
b) $O(0,0)$.

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-1 + 2i$

e) 0

f) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

a) 1.

b) $\frac{3}{5}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) 2.

e) 390.

2.

a) $\frac{227}{60}$.

b) $\frac{-1}{(x+1)^2}$.

c) 1.

d) $x = -1$ este asimptotă verticală.

e) $1 + \ln \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $(-1) \circ 2 = -1$.

b) $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1 = (2xy + 2x) + (2y + 2) - 1 = 2(y + 1)(x + 1) - 1$.

c) Din b),

$$(x \circ y) \circ z = 4(y + 1)(x + 1)(z + 1) - 1.$$

$$x \circ (y \circ z) = 4(y + 1)(z + 1)(x + 1) - 1.$$

Deci, $x \circ (y \circ z) = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbf{R}$.

d) Luăm $a = b = -1 + \sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

e) Din b), avem

$$x \circ y = 2(x+1)(y+1) - 1. \text{ Atunci } 2(x+1)(y+1) = 0.$$

Obținem $x = -1$ sau $y = -1$.

f) $(-2004) \circ (-2003) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2003 \circ 2004 = -1 < 0$.

g) Din b) obținem $a \circ a = 2(a+1)(a+1) - 1 = 2(a+1)^2 - 1$.

Presupunem $\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de\ k\ ori} = 2^{k-1}(a+1)^k - 1$, adevărată $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

Si demonstrăm $\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de\ k+1\ ori} = 2^k(a+1)^{k+1} - 1$

$$\begin{aligned} \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de\ k+1\ ori} &= \underbrace{(a \circ a \circ \dots \circ a)}_{de\ k\ ori} \circ a = \\ &= 2[2^{k-1}(a+1)^k - 1] \cdot a + 2[2^{k-1}(a+1)^k - 1] + 2 \cdot a + 1 = \\ &= 2^k(a+1)^k(a+1) - 1, \text{ adevărată, deci } \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{de\ n\ ori} = 2^{n-1}(a+1)^n - 1, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall a \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$, $x \in \mathbf{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$.

c) $f'(x) = 0$, rezultă $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		2	

Rezultă ca f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

e) Din d), deducem că f nu admite asimptota orizontală spre $+\infty$.

Studiem asimptota oblică.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 + 4} - x] = 0$$

Avem că $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$.

f) $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = \sqrt{5} - 2$.

g) Dacă $x < 0$, din c) rezultă $f(11x) < f(21x)$ iar $f(1984x) < f(2004x)$,

deci $f(11x) + f(1984x) < f(21x) + f(2004x)$. Atunci $x < 0$ nu poate fi soluție.
Analog, $x > 0$ nu poate fi soluție. Rămâne $x = 0$ este soluție unică.

