

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta087

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) 1. Să se calculeze distanța de la punctul $A(5, 4)$ la punctul $B(2, 6)$.
- (4p) b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2-i)(4+i) = a+bi$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6.
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex $-4+5i$.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(5, 4)$ și $B(4, 5)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC , $AB = 4$, $AC = 5$ și $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$, să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $5^n < 29$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $9^x - 3 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația $\log_2 x = 3$.
- (3p) e) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g = X^2 - X + 1$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^6}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^6 + 1) \cdot f(n))$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 087

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \left(\frac{1}{3}, \infty\right) \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, $f(x) = \frac{4x-1}{9x-2}$.

- (4p) a) Să se verifice că $A + I_2 = B$.
- (4p) b) Să se arate că $A^2 = O_2$.
- (4p) c) Să se calculeze matricea B^2 .
- (2p) d) Să se arate că, dacă $x > \frac{1}{3}$, atunci $\frac{4x-1}{9x-2} > \frac{1}{3}$.
- (2p) e) Să se calculeze $(f \circ f)(x)$, $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $B^n = I_2 + nA$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{de n ori f}(x) = \frac{(3n+1)x-n}{9nx+1-3n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră mulțimea $A = \mathbf{R} - \{1, 2, 3\}$ și funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, $g(x) = f'(x)$, $h(x) = g'(x)$ și $u : A \rightarrow \mathbf{R}$,

$$u(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $u'(x)$, $x \in A$.
- (4p) b) Să se arate că $g(x) = f(x) \cdot u(x)$, $\forall x \in A$.
- (4p) c) Să se arate că $u'(x) < 0$, $\forall x \in A$.
- (2p) d) Să se arate că $u'(x) = \frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)}$, $\forall x \in A$.
- (2p) e) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției u .
- (2p) f) Să se calculeze $\int_4^5 u(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că $g^2(x) > h(x) \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 087

Varianta 087

SUBIECTUL I

- a) $\sqrt{13}$.
- b) $a = 9, b = -2$.
- c) $9\sqrt{3}$.
- d) $-4 - 5i$.
- e) $a = 1, b = -9$.
- f) $\sqrt{41}$.

SUBIECTUL II

- a) 3.
- b) $\frac{2}{5}$.
- c) $\frac{1}{2}$.
- d) 8.
- e) Câtul este $X^2 + X + 1$. Restul este 0.
- 2.
- a) $-\frac{6}{x^7}$.
- b) -6.
- c) $x = 0$ este asimptotă verticală.
- d) $\frac{31}{160}$.
- e) 1.

SUBIECTUL III

- a) $A + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} = B$.
 - b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.
 - c) $B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 18 & -5 \end{pmatrix}$.
 - d) $\frac{4x-1}{9x-2} > \frac{1}{3}$ sau $\frac{4x-1}{9x-2} - \frac{1}{3} > 0$ sau $\frac{3x-1}{9x-2} > 0$.
- Cum $x > \frac{1}{3}$ avem $3x - 1 > 0$.

Cum $3x > 1$ avem $9x > 3 > 2$. Deci $9x - 2 > 0$. Atunci $\frac{3x-1}{9x-2} > 0$, $\forall x > \frac{1}{3}$.

e) $(f \circ f)(x) = \frac{7x-2}{18x-5}$.

f) $B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 18 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$.

Presupunem $B^k = I_2 + kA$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Demonstrăm $B^{k+1} = I_2 + (k+1)A$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

$$B^{k+1} = B^k \cdot B = (I_2 + kA) \cdot B = (I_2 + kA) \cdot (A + I_2) = A + I_2 + kA^2 + kA =$$

$$= I_2 + (k+1)A + O_2, \text{ deoarece din b), } A^2 = O_2.$$

Am obținut $B^{k+1} = I_2 + (k+1)A$, adevărată $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $B^n = I_2 + nA$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) Din e), $(f \circ f)(x) = \frac{7x-2}{18x-5} = \frac{(3 \cdot 2 + 1)x - 2}{9 \cdot 2x + 1 - 3 \cdot 2}$.

Presupunem $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k \text{ ori } f}(x) = \frac{(3k+1)x - k}{9kx + 1 - 3k}$. Demonstrăm

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k+1 \text{ ori } f}(x) = \frac{(3k+4)x - k - 1}{9(k+1)x + 1 - 3(k+1)}.$$

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k+1 \text{ ori } f}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k \text{ ori } f}(f(x)) = \frac{(3k+1) \cdot \frac{4k-1}{9k-2} - k}{9k \cdot \frac{4x-1}{9x-2} + 1 - 3k} = \frac{x(3k+4) - k - 1}{9k(x+1) + 1 - 3(k+1)},$$

deci $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{(3n+1)x - n}{9nx + 1 - 3n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL IV

a) $u'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}$.

b) $f(x) \cdot u(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2) = g(x)$;

$$g(x) = f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2).$$

c) Din a), $u'(x) = -\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} \right] < 0$, $\forall x \in A$.

d) Din b), avem $u(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. Atunci

$$u'(x) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)}, \forall x \in A.$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right) = 0$, deci $y = 0$ este asymptota orizontală spre $+\infty$

f) $\int_4^5 u(x) dx = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right) dx = \left(\ln |(x-1)(x-2)(x-3)| \right)_4^5 = \ln \frac{24}{6} = \ln 4 = 2 \ln 2$.

g) Din c), $u'(x) < 0$, $\forall x \in A$, deci $\frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)} < 0$. Rezultă $f(x)h(x) - g^2(x) < 0$ sau $g^2(x) > h(x) \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.