

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta086

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A(2, 0)$, $B(-1, \sqrt{3})$ și $C(-1, -\sqrt{3})$

- (4p) a) Să se arate că punctul M este mijlocul segmentului (AB) .
- (4p) b) Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.
- (4p) c) Să se arate că punctele O, M și C sunt coliniare.
- (4p) d) Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se calculeze $\frac{\sin^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ}$.
- (2p) f) Să se determine partea reală a numărului complex $z = i \cdot (1-i)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice care are primul termen egal cu 2 și rația egală cu 3.
- (3p) b) Să se rezolve ecuația $3^{2x} = 9 \cdot 3^x$, $x \in \mathbb{R}$
- (3p) c) Să se determine probabilitatea ca un număr din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ să fie soluție a inecuației $x^2 - 5x + 6 > 0$.
- (3p) d) Să se calculeze $C_4^1 - C_4^2 + C_4^3$.
- (3p) e) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, ecuația $z^2 = -4$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 4x^3$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbb{R} .

- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(-x)}{x^3}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

și funcția $f : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R})$, $f(X) = X^2 - X$.

(4p) a) Să se arate că $B = I_2 + A$.

(4p) b) Să se arate că $A^2 = A$.

(4p) c) Să se calculeze determinantul matricei B .

(2p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\det(B - x \cdot I_2) = 0$.

(2p) e) Să se calculeze $f(A)$ și $f(B)$.

(2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$,

$$B^n = I_2 + (2^n - 1) \cdot A.$$

(2p) g) Să se calculeze $\det(B) + \det(B^2) + \dots + \det(B^{100})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + x)$.

(4p) a) Să se calculeze $f(2) - f(1)$.

(4p) b) Să se arate că $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$, pentru $x > 0$.

(4p) c) Să se arate că funcția este crescătoare pe $(0, \infty)$.

(2p) d) Să se determine ecuația asymptotei verticale la graficul funcției f .

(2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f'(x)$.

(2p) f) Să se calculeze $\int_1^{e^2} \left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx$.

(2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \dots + f(2n-1) - f(2n))$.

Varianta 86

SUBIECTUL I

- a) Dacă N este mijlocul segmentului (AB) atunci $N\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, deci N=M. De unde rezultă că M este mijlocul segmentului (AB).
- b) $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{3}$ și $AC = 2\sqrt{3}$ de unde rezultă că ΔABC este echilateral.
- c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ punctele O, M, C sunt coliniare.
- d) $R = 2$.
- e) $\frac{\sin^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} = 1$.
- f) $\operatorname{Re} z = 1$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 40$.
- b) $x = 2$.

c) $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

d) $C_4^1 - C_4^2 + C_4^3 = 2$

e) $z = \pm 2i$.

2.

a) $f(0) = 1$.

b) $f'(x) = e^x + 12x^2$.

c) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ atunci f este crescătoare pe \mathbf{R} .

d) $\int_0^1 f(x) dx = e$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(-x)}{x^3} = -4$.

SUBIECTUL III

- a) $I_2 + A = B$.
- b) $A^2 = A$.
- c) $\det(B) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2$.

d) $\det(B - x \cdot I_2) = x^2 - 3x + 2$. Ecuația devine $x^2 - 3x + 2 = 0$ cu soluțiile 1 și 2.

e) $f(A) = A^2 - A = O_2$. Iar $f(B) = B^2 - B = 2A$.

f) Fie $P(n) : B^n = I_2 + (2^n - 1)A$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(1) : B = I_2 + A, \text{ (A).}$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k) : B^k = I_2 + (2^k - 1)A, \text{ iar } P(k+1) : B^{k+1} = I_2 + (2^{k+1} - 1)A.$$

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B^k \cdot B = [I_2 + (2^k - 1)A][I_2 + A] = \\ &= I_2 + A + (2^k - 1)A + (2^k - 1)A = I_2 + (2^{k+1} - 1)A. \end{aligned}$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) Deoarece $\det(B^k) = (\det B)^k = 2^k$ suma devine

$$2 + 2^2 + \dots + 2^{100} = 2 \frac{2^{100} - 1}{2 - 1} = 2^{101} - 2.$$

SUBIECTUL IV

a) $f(2) - f(1) = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$

$$b) f'(x) = (\ln(x^2 + x))' = \frac{2x + 1}{(x^2 + x)}.$$

c) $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, \infty)$.

d) Calculăm $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x^2 + x) = \ln(0_+) = -\infty$; $\Rightarrow x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + x} = 2.$$

f) Deoarece $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x^3 = 3 \ln x$ atunci:

$$\int_1^{e^2} \left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = 3x \ln x \Big|_1^{e^2} - 3 \int_1^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx = 3(e^2 + 1)..$$

g) $f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \dots + f(2n-1) - f(2n) =$

$$\ln(1 \cdot 2) - \ln(2 \cdot 3) + \ln(3 \cdot 4) - \ln(4 \cdot 5) + \dots + \ln[(2n-1)2n] - \ln[2n(2n+1)] =$$

$$\ln\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-1)2n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)}\right) = \ln \frac{1}{2n+1} \text{ de unde:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \dots + f(2n-1) - f(2n)) = \ln 0_+ = -\infty.$$