

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta085

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze aria triunghiului ABC , dacă $AB = 4$, $AC = 6$ și $BC = 8$.
- (4p) b) Să se determine distanța dintre punctele $A(\sqrt{2}, 0)$ și $B(0, \sqrt{2})$.
- (4p) c) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele $A(\sqrt{2}, 0)$ și $B(0, \sqrt{2})$.
- (4p) d) Să se calculeze $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$.
- (2p) e) Să se verifice dacă punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$ și $C(2,-1)$ sunt coliniare.
- (2p) f) Să se calculeze partea reală a numărului complex $(1+i)^4$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.

 - (3p) a) Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 2^x & 1 \\ 1 & 2^{-x} \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$.
 - (3p) b) Să se calculeze $\log_2 10 - \log_2 25 + \log_2 5$.
 - (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$ să fie soluție a ecuației $3^n = 9$
 - (3p) d) Să se determine numărul natural n , $n \geq 3$ astfel încât $C_n^3 = 4$.
 - (3p) e) Să se calculeze expresia $E = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 5x + 4 = 0$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{1,3\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$.

 - (3p) a) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}$, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1,3\}$.
 - (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1,3\}$.
 - (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$.
 - (3p) d) Să se calculeze $\int_{-1}^0 f(x) dx$.
 - (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- (4p) b) Să se verifice că $A^2 = 3A$.
- (4p) c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}, x, y \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $A^n = 3^{n-1} A, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se determine numărul real a , astfel încât $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2$.
- (2p) f) Să se găsească o matrice $B \in M_2(\mathbf{R})$, astfel încât $AB \neq BA$.
- (2p) g) Să se demonstreze că matricea $A + A^2 + \dots + A^{2004} - A^{2005}$ are toate elementele strict negative.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}$,

definit prin $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n), \forall n \geq 1$.

- (4p) a) Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se determine ecuația asymptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se arate că $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2+1}, \forall n \geq 1$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - a_n \right) \cdot n^2$.
- (2p) g) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 085

SUBIECTUL I

- a) $3\sqrt{15}$.
- b) 2.
- c) $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- e) Punctele sunt coliniare
- f) -4.

SUBIECTUL II

- 1.
- a) 0.
- b) 1.
- c) $\frac{1}{6}$.
- d) 4
- e) $\frac{5}{4}$.
- 2.
- a) $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$.
- b) $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}$.
- c) $\frac{3}{16}$.
- d) $\ln\frac{3}{2}$.
- e) 2

SUBIECTUL III

- a) $\det A = 0$.
- b) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 3A$.
- c) Matricea sistemului este $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\Delta = 0$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat
Fie $y = a \in \mathbf{R}$; atunci $x = -a \in \mathbf{R}$. $S = \{(-a, a) \mid a \in \mathbf{R}\}$.
- d) Din b) avem $A^2 = 3A$, deci verificarea este făcută.
Arătăm că $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

Presupunem $A^k = 3^{k-1} A$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Demonstrăm

$$A^{k+1} = 3^k A \cdot A^{k+1} = A^k \cdot A = 3^{k-1} \cdot A \cdot A = 3^{k-1} \cdot A^2 = 3^{k-1} \cdot 3A = 3^k A, \text{ adevărată.}$$

Atunci $A^n = 3^{n-1} A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 + (4a+1)A = I_2$. Deci,

$$4a+1=0 \text{ sau } a=-\frac{1}{4}.$$

f) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. $AB = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix};$

$$BA = \begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ c+2d & c+2d \end{pmatrix}. \text{ Cum } AB \neq BA, \text{ obținem}$$

$a+c \neq a+2b$ sau $b+d \neq a+2b$ sau $2a+2b \neq c+2d$ sau $2b+2d \neq c+2d$. Avem $c \neq 2b$. Alegem $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

g) Din d), $A + A^2 + \dots + A^{2004} - A^{2005} = A + 3A + 3^2 A + \dots + 3^{2003} A - 3^{2004} A =$
 $= A(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2003} - 3^{2004}) = A\left(\frac{3^{2004}-1}{3-1} - 3^{2004}\right) = -\left(\frac{1+3^{2004}}{2}\right)A.$

Deci matricea $A + A^2 + \dots + A^{2004} - A^{2005}$ are toate elementele strict negative.

SUBIECTUL IV

a) $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{x^2+2x+2-x^2-1}{[(x+1)^2+1](x^2+1)} = \frac{2x+1}{[(x+1)^2+1](x^2+1)}.$

b) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2}, \forall x \in \mathbf{R}.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$, rezultă că $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

d) $f(1) = \frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{2^2+1};$

$$f(2) = \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{3^2+1};$$

.....

$$f(n) = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1};$$

Obținem $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2+1}, \forall n \geq 1$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2};$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - a_n \right) \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2+1} \right) \cdot n^2 = 1.$

$$\text{g) } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1} \right) dx = \arctgx|_0^1 - \arctg(x+1)|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \arctg 2.$$

