

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
***Varianta ....084***

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**NOTĂ.**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex  $4 - 3i$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele  $A(3, -2)$  și  $C(4, -3)$ .
- (4p) c) Să se calculeze aria unui pătrat care are diagonala de lungime  $5\sqrt{2}$ .
- (4p) d) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât punctele  $A(3, -2)$  și  $C(4, -3)$  să fie pe dreapta de ecuație  $x + ay + b = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(3, -2)$ ,  $B(2, 2)$  și  $C(4, -3)$ .
- (2p) f) Să se determine perimetrul unui triunghi dreptunghic isoscel care are o catetă de lungime 3.

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației  $x^2 - 2x - 11 = 0$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $C_8^3 - C_8^5 + C_8^8$ .
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive , ecuația  $\log_5 x = 1$ .
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale , ecuația  $16^x - 32 = 0$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $3^n < 19$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 + 2x - 1$ .
- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^5}$ .

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

**Varianta 084**

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$  și  $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ ,  
 $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}$ .

- (4p) a) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația  $f_1(x) = 0$ .
- (4p) b) Să se verifice egalitatea  $f_1(x) = (x-1)^3 + 1, \forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se arate că  $f_2(x) = (x-1)^{3^2} + 1, \forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  

$$f_n(x) = (x-1)^{3^n} + 1, \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$
.
- (2p) e) Să se arate că  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ , funcția  $f_n$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) f) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) - 3 = 0$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_{2007}(1)$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^x - x$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x), x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(-\infty, 0]$  și strict crescătoare pe intervalul  $[0, \infty)$ .
- (4p) c) Să se arate că  $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$
- (2p) f) Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuația  $f(x) + f(x^2) + f(x^3) = 3$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(-1) + f(-2) + \dots + f(-n)}{n^2}$ .

### Varianta 84

#### SUBIECTUL I

- a)  $\bar{z} = 4 + 3i$ .
- b)  $AC = \sqrt{2}$ .
- c)  $S = 25$ .
- d)  $a = 1$  și  $b = -1$ .
- e)  $S_{ABC} = \frac{3}{2}$ .
- f)  $P = 6 + 3\sqrt{2}$ .

#### SUBIECTUL II

1.

- a)  $x_1 + x_2 = 2$ .
- b)  $C_8^3 - C_8^5 + C_8^8 = 1$ .
- c)  $x = 5$ .
- d)  $x = \frac{5}{4}$ .
- e)  $p = \frac{2}{5}$ .

2.

- a)  $f'(x) = 5x^4 + 2$ .
- b)  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$ .
- d)  $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$  funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^5} = 1$ .

#### SUBIECTUL III

- a)  $f_1(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$  este singura soluție reală.
- b)  $(x-1)^3 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = f_1(x)$ .
- c)  $f_2(x) = f_1(f_1(x)) \stackrel{b)}{=} ((x-1)^3 + 1 - 1)^3 + 1 = (x-1)^{3^2} + 1$ .
- d) Pentru  $n=1$  relația este adevărată din b). Presupunem adevărat că  $f_k(x) = (x-1)^{3^k} + 1$  și demonstrăm că  $f_{k+1}(x) = (x-1)^{3^{k+1}} + 1$ .

Dar  $f_{k+1}(x) = f_k(f_1(x)) = f_k((x-1)^3 + 1) = ((x-1)^3 + 1 - 1)^{3^k} + 1 = (x-1)^{3^{k+1}} + 1$ .

Folosind metoda inducției matematice  $\Rightarrow f_n(x) = (x-1)^{3^n} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

- e)  $f'_n(x) = 3^n(x-1)^{3^n-1} \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ , deoarece  $3^n - 1$  este număr par.
- f) Observăm că  $x=1$  este soluție. Dacă  $x > 1 \stackrel{e)}{\Rightarrow} f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) > 3$ . Analog dacă  $x < 1 \stackrel{e)}{\Rightarrow} f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) < 3$ . Deci  $x=1$  este soluție unică.
- g) Din d)  $\Rightarrow f_k(1) = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$ . Atunci  $f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_{2007}(1) = 2007$ .

#### SUBIECTUL IV

- a)  $f'(x) = e^x - 1$ .
- b)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; f'(x) \leq 0, \forall x \leq 0$  și  $f'(x) \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow$  funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$  și crescătoare pe  $[0, \infty)$ .
- c) Folosind b) rezultă că  $x=0$  este punct de minim global  $\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$  nu există asimptotă orizontală spre  $-\infty$ . Căutăm asimptotă oblică:  $y = mx + n$ , unde  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = -1$  și  $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = -x$  este asimptotă oblică spre  $-\infty$ .
- e)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x - x) dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x dx = e - \frac{3}{2}$ .
- f) Din c)  $f(x) \geq 1, f(x^2) \geq 1$  și  $f(x^3) \geq 1, \forall x \in \mathbf{R}$  cu egalitate pentru  $x=0 \Rightarrow$  Ecuația admite soluția unică  $x=0$ .
- g)  $f(-1) + f(-2) + \dots + f(-n) = e^{-1} + e^{-2} + \dots e^{-n} + 1 + 2 + \dots + n = \frac{(e^{-1})^n - 1}{e^{-1} - 1} + \frac{n(n+1)}{2}$ . De unde limita cerută este  $\frac{1}{2}$ .