

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta083

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(3,4)$ și $B(6,3)$.
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A(3,4)$, $B(6,3)$ și $C(5,7)$.
- (4p) c) Știind că $\sin x = 0$, să se calculeze $\cos^2 x$.
- (4p) d) Să se determine înălțimea unui triunghi echilateral având lungimea laturii 3.
- (2p) e) Să se determine numerele reale a și b astfel încât punctele $A(3,4)$ și $B(6,3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC avem $AB = 6$, $AC = 8$ și $m(\hat{B}AC) = 90^\circ$, să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze numărul de funcții $f : \{a,b\} \rightarrow \{1,2,3\}$ cu proprietatea $f(a) + f(b) = 3$.
 - (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația
- $$2^n \geq n + 2.$$
- (3p) c) Să se rezolve, în \mathbf{R} , ecuația $3^x - 1 = 0$.
 - (3p) d) Să se calculeze $2 + 5 + 8 + \dots + 32$.
 - (3p) e) Se dau funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = x + 3$. Să se calculeze $(g \circ f)(-1)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
- (3p) b) Să se afle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 083

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + x - 3$ și mulțimea $A = \{f(n) | n \in \mathbf{N}\}$.

- (4p) a) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f(x) = 0$.

Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

- (4p) b) Să se verifice identitatea $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) c) Să se arate că $x_1 + x_2 = -1$ și $x_1 \cdot x_2 = -3$.

- (2p) d) Să se arate că $f(x) \cdot f(x+1) = f(x^2 + 2x - 3)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (2p) e) Să se verifice că $f(x) = f(-1-x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (2p) f) Să se arate că mulțimea A conține cel puțin 2006 numere naturale care nu sunt prime.

- (2p) g) Să se găsească 2 elemente din mulțimea A , mai mari decât numărul $f(2006)$,

care se divid cu numărul $f(2006)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x^2)$.

- (2p) d) Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

- (2p) e) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă către $+\infty$.

- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} (f(x) - x^2 + 1) dx \right)$.

Varianta 83

SUBIECTUL I

- a) $AB = \sqrt{10}$.
- b) $S = \frac{11}{2}$.
- c) $\cos^2 x = 1$.
- d) $a = 3, b = -15$
- e) $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- f) $BC = 10$.

SUBIECTUL II

1.

- a) Există două funcții cu proprietatea dată.
- b) $p = \frac{4}{5}$.
- c) $x = 0$.
- d) $S_{11} = 187$.
- e) $g(f(-1)) = 0$

2.

- a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$.
- c) $x=0$ este asimptotă verticală .
- d) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{2} - \ln 2$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = 1$.

SUBIECTUL III

- a) $f(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.
- b) Aplicăm relațiile lui Viète sau calcul direct .
- c) Calcul direct sau $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - (-1)x - 3 = f(x)$.

- d) $f(x) \cdot f(x+1) = \overset{b)}{(x-x_1)(x-x_2)(x+1-x_1)(x+1-x_2)} = \overset{c)}{(x^2+2x-3-x_1)(x^2+2x-3-x_2)} = f(x^2+2x-3), \forall x \in \mathbf{R}.$
- e) $f(-1-x) = \overset{b)}{(-1-x-x_1)(-1-x-x_2)} = \overset{c)}{(x_2-x)(x_1-x)} = f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$
- f) Din $f(n) > 1, \forall n \geq 2$ și $f(n^2 + 2n - 3) = f(n) \cdot f(n+1) \Rightarrow f(n^2 + 2n - 3)$ nu e prim pentru $\forall n > 1$. Rezultă că mulțimea contine o infinitate de numere care nu sunt prime, deci cel puțin 2006.
- g) Folosind d) avem că: $f(2005)f(2006) = f(2005^2 + 2 \cdot 2005 - 3) = \overset{not}{n}$ și $f(2006)f(2007) = f(2006^2 + 2 \cdot 2006 - 3) = \overset{not}{m} \Rightarrow m$ și n se divid cu $f(2006)$. Cum $f(n) > 1, \forall n \geq 2$ rezultă că $f(2005)f(2006) > f(2006)$. Deci $n > f(2006)$. Analog $m > f(2006)$. Numerele căutate sunt m și n .

SUBIECTUL IV

- a) Calculăm $x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^4}{x^2 + 1} = f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$
- b) $f'(x) = 2x - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^4 + 2x^2)}{(x^2 + 1)^2}, \forall x \in \mathbf{R}.$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) = -1.$
- d) $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, \infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, \infty)$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^2 + 1} = \infty \Rightarrow$ funcția f nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^3 + x} = \infty \Rightarrow$ funcția f nu admite asimptotă oblică spre $+\infty$.
- f) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$
- g) Deoarece $\int_0^{\frac{1}{n}} (f(x) - x^2 + 1) dx = \arctg \frac{1}{n}$, atunci limita cerută este
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \arctg \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$