

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Variantă081

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze aria unui pătrat cu perimetrul 16.
 (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(2, 3)$ și $B(3, 2)$.
 (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$.
 (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(2, 3)$ și $B(3, 2)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
 (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, 3)$, $B(3, 2)$ și $C(1, 1)$.
 (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$$\frac{2+3i}{4+5i} = a+bi$$
.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.
 (3p) b) Să se calculeze matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{2007}$.
 (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive , ecuația $\log_5 x = \log_6 x$.
 (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale , ecuația $3^x = 9^x$.
 (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n + 4^n > 5^n$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 5x - 2 \sin x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{7n^2 + n - 1}$.
 (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 9} dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Variantă 081

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea de funcții

$$G = \left\{ f_n \mid f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_n(x) = (x+1)^{3^n} - 1, \forall n \in \mathbf{Z}, \forall x \in \mathbf{R} \right\}.$$

- (4p) a) Să se arate că funcția $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = x$, aparține mulțimii G .
- (4p) b) Să se arate că $f_n \circ f_p = f_{n+p}$, $\forall n, p \in \mathbf{Z}$.
- (4p) c) Să se arate că $(f_n \circ f_{-n})(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) d) Să se calculeze suma $f_1(-1) + f_2(-1) + \dots + f_{2005}(-1)$.
- (2p) e) Să se arate că funcția f_1 este crescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) f) Să se arate că mulțimea G împreună cu operația de compunere a funcțiilor determină o structură de grup.
- (2p) g) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f_1(x) + f_2(x) = 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = h(x) + \frac{x^3}{3!}$,

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = g(x) + \frac{x^4}{4!}.$$

- (4p) a) Să se arate că $g'(x) = h(x)$ și $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că $h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția g este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) d) Să se calculeze $\int_0^1 h(x) dx$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- (2p) f) Să se arate că ecuația $g(x) = 0$ are o singură soluție reală.
- (2p) g) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 81

SUBIECTUL I

- a) $S = 16$
 b) $AB = \sqrt{2}$.
 c) $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.
 d) $a = 1$ și $b = -5$.
 e) $S_{ABC} = \frac{3}{2}$.
 f) $a = \frac{23}{41}$ și $b = \frac{2}{41}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) Valoarea determinantului este: -8 .
 b) $A^{2007} = O_2$.
 c) $x = 1$.
 d) $x = 0$.
 e) $p = \frac{1}{5}$.

2.

- a) $f'(x) = 5 - 2 \cos x$.
 b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + 2 \cos 1$.
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$.
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{7n^2 + n - 1} = \frac{5}{7}$.
 e) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 9} dx = -\frac{1}{6} \ln 2$.

SUBIECTUL III

- a) $f_0(x) = (x+1)^{3^0} - 1 = x = g(x), \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow g = f_0 \Rightarrow g \in G$.

- b)** $(f_n \circ f_p)(x) = f_n((x+1)^{3^p} - 1) = ((x+1)^{3^p} - 1 + 1)^{3^n} - 1 = (x+1)^{3^{n+p}} - 1 = f_{n+p}(x)$ De unde $f_n \circ f_p = f_{n+p}$, $\forall n, p \in \mathbf{Z}$.
- c)** $(f_n \circ f_{-n})(x) = f_{n-n}(x) = f_o(x) = g(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- d)** Observăm că $f_k(-1) = -1$, $\forall k \in \mathbf{N}$. $f_1(-1) + f_2(-1) + \dots + f_{2005}(-1) = -2005$.
- e)** $f_1(x) = (x+1)^3 - 1 \Rightarrow f_1'(x) = 3(x+1)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f_1$ este crescătoare pe \mathbf{R} .
- f)** Folosind **a)**, **b)** și **c)** se verifică axiomele grupului.
- g)** Notăm $(x+1)^3 = t$ și ecuația devine: $t^3 + t - 2 = 0$ cu singura soluție reală $t = 1 \Rightarrow (x+1)^3 = 1 \Rightarrow x = 0$.

SUBIECTUL IV

- a)** $g'(x) = h'(x) + \left(\frac{x^3}{3!} \right)' = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} = h(x)$.
- $$f'(x) = g'(x) + \left(\frac{x^4}{4!} \right)' = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = g(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}$$
- b)** $h(x) = \frac{1 + (1+x)^2}{2} > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- c)** $g'(x) = h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow g$ este crescătoare pe \mathbf{R} .
- d)** $\int_0^1 h(x) dx = g(x)|_0^1 = \frac{5}{3}$.
- e)** $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) = -\infty$.
- f)** Deoarece funcția g este continuă $\Rightarrow \text{Im } f = \mathbf{R} \Rightarrow$ ecuația are cel puțin o soluție.
 Deoarece funcția g este strict crescătoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow$ ecuația are cel mult o soluție.
 Atunci ecuația are soluție unică.
- g)** $f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24}{24} = \frac{(x^2 + 2x)^2 + 2(2x + 3)^2 + 6}{24} > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.