

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta080

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(2,3)$ și $B(5,2)$.
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A(2,3)$, $B(5,2)$ și $C(4,6)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x = 1$.
- (4p) d) Să se determine înălțimea unui triunghi echilateral cu latura de lungime 2.
- (2p) e) Să se determine numerele reale a și b astfel încât punctele $A(2,3)$ și $B(5,2)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 3$, $AC = 4$ și $m(\hat{B}AC) = 90^\circ$.Să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze numărul funcțiilor $f : \{a,b\} \rightarrow \{1,2,3\}$ cu proprietatea $f(a) \cdot f(b) = 3$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $2^n \leq n + 1$.
- (3p) c) Să se rezolve în \mathbf{R} , ecuația $2^x - 1 = 0$.
- (3p) d) Să se calculeze $1 + 4 + 7 + \dots + 31$.
- (3p) e) Se dau funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x + 5$. Să se calculeze $(g \circ f)(-1)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
- (3p) b) Să se afle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și polinomul $f = X^2 - 4X + 3$.

- (4p) a) Să se rezolve în \mathbf{R} , ecuația $f(x) = 0$.
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei A .
- (4p) c) Să se calculeze matricea A^2 .
- (2p) d) Să se arate că $f(A) = O_2$, unde $f(A) = A^2 - 4A + 3I_2$.
- (2p) e) Să se arate că $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se verifice că

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$$
- (2p) g) Să se calculeze matricea $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2007}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^8}{x^4 + 1}$.

- (4p) a) Să se arate că $f(x) = x^4 - 1 + \frac{1}{x^4 + 1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x^4)$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^1 (x^4 + 1) \cdot f(x) dx$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,
 $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{(1^4 + 1)f(1)}{1^5} + \frac{(2^4 + 1)f(2)}{2^5} + \dots + \frac{(n^4 + 1)f(n)}{n^5}.$$
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(1^4 + 1)f(1)}{1^5} + \frac{(2^4 + 1)f(2)}{2^5} + \dots + \frac{(n^4 + 1)f(n)}{n^5}}{n^4}$.

Varianta 80**SUBIECTUL I**

- a) $AB = \sqrt{10}$.
- b) $S_{ABC} = \frac{11}{2}$.
- c) $\cos x = 0$.
- d) $h = \sqrt{3}$.
- e) $a = 3, b = -11$
- f) $BC = 5$.

SUBIECTUL II

1.

- a) Există două funcții cu proprietatea dată.
- b) $p = \frac{1}{5}$.
- c) $x = 0$.
- d) $1 + 4 + 7 + \dots + 31 = 176$
- e) $(g \circ f)(-1) = 4$

2.

- a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
- c) $x = 0$ este asymptotă verticală.
- d) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{2} + \ln 2$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = 1$.

SUBIECTUL III

- a) $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$.
- b) $\det(A) = 3$.
- c) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- d) $A^2 - 4A + 3I_2 = O_2$.

e) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot B) = -3, \det(B) = -1 \Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$

f) Fie $P(n): A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$

$$P(1): A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (A).$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{pmatrix} \text{ iar } P(k+1): A^{k+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{k+1} + 1 & 3^{k+1} - 1 \\ 3^{k+1} - 1 & 3^{k+1} + 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{k+1} + 1 & 3^{k+1} - 1 \\ 3^{k+1} - 1 & 3^{k+1} + 1 \end{pmatrix}.$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2007} =$
 $= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+1 & 3-1 \\ 3-1 & 3+1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^2+1 & 3^2-1 \\ 3^2-1 & 3^2+1 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{2007}+1 & 3^{2007}-1 \\ 3^{2007}-1 & 3^{2007}+1 \end{pmatrix} =$
 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} S+2007 & S-2007 \\ S-2007 & S+2007 \end{pmatrix} \text{ unde } S = 3 + 3^2 + \dots + 3^{2007} = \frac{3}{2} (3^{2007} - 1).$

SUBIECTUL IV

a) Calculăm $x^4 - 1 + \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{x^8 - 1 + 1}{x^4 + 1} = \frac{x^8}{x^4 + 1} = f(x), \forall x \in \mathbf{R}.$

b) $f'(x) = 4x^3 - \frac{4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{4x^3(x^8 + 2x^4)}{(x^4 + 1)^2}, \forall x \in \mathbf{R}.$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x^4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{x^4 + 1} \right) = -1.$

d) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

e) $\int_{-1}^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \int_{-1}^1 x^8 dx = \frac{2}{9}.$

f) Fie $P(n): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

$$P(1): 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Leftrightarrow 1=1 \text{ adevarat.}$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \text{ iar}$$

$$P(k+1): 1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 \stackrel{P(k)}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

De unde $P(n)$ este (A), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) Deoarece: $\frac{(k^4+1)f(k)}{k^5} = k^3$ unde $k \geq 1$ atunci limita cerută

$$\text{devine: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} \stackrel{f)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}.$$