

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta075

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(-3,4)$ la punctul $B(4, -3)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos^2 121 + \sin^2 121$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{10}$.
- (4p) d) Să se calculeze conjugatul numărului complex $-7 + 8i$.
- (2p) e) Să se calculeze $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(-3,4)$ și $B(4, -3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC , $AB = 3$, $AC = 5$ și $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$, să se calculeze lungimea laturii BC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $5^n < 57$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $5^x - 1 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația $\log_9 x = -2$.
- (3p) e) Să se calculeze expresia $E = C_8^1 - C_8^7 + C_8^8$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f'(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 f(n)}{2007 + n^2}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X]$, $f(x) = X^2 + X - 3$,

$$g = (X^2 + 2X - 3)^2 + X^2 + 2X - 6 \text{ și } x_1, x_2 \text{ rădăcinile polinomului } f.$$

- (4p) a) Să se rezolve în \mathbf{R} , ecuația $f(x) = 0$.

Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

- (4p) b) Să se verifice că $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) c) Să se arate că $x_1 + x_2 = -1$ și $x_1 \cdot x_2 = -3$.

- (2p) d) Să se arate că $f(x) \cdot f(x+1) = f(x^2 + 2x - 3)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (2p) e) Să se verifice că $f(x) = f(-1-x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (2p) f) Să se afle rădăcinile polinomului g .

- (2p) g) Să se afle restul împărțirii polinomului g la polinomul f .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2 + 3^{3x}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (4p) b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

- (4p) c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

- (2p) d) Să se verifice că $f(x) > 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (2p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

- (2p) f) Să se rezolve în \mathbf{R} , ecuația $f(x) + f(x+1) = 32$.

- (2p) g) Să se arate că există două funcții $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, strict crescătoare, astfel

$$\text{încât } f(x) = g(x) - h(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

Varianta 075

Subiectul I

a) $AB = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$

b) $\cos^2 121 + \sin^2 121 = 1$

c) Aria este $\frac{10\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $z = -7 + 8i \Rightarrow \bar{z} = -7 - 8i$

e) Obțin sistemul $\begin{cases} -3 + 4a + b = 0 \\ 4 - 3a + b = 0 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

f) Aplicând teorema lui Pitagora: $BC = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6$

b) Probabilitatea este $\frac{2}{5}$

c) $5^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5^x = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$

d) $\log_9 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{81}$

e) $E = C_8^1 - C_8^1 + 1 = 1$

2.

a) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} (\forall)x > 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}$

c) $f'(x) < 0 \quad (\forall)x > 0 \quad (\text{din } a) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$

d) $\int_1^2 f'(x) dx = f(2) - f(1) = 2 + \frac{1}{5} - 2 - \frac{1}{2} = \frac{-3}{10}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 f(n)}{n^2 + 2007} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right)}{n^2 + 2007} = 1$

Subiectul III

a) $x^2 + x - 3 = 0 \quad \Delta_x = 1 + 12 = 13 \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

b) Calcul direct;

- c) $x_1 + x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13} - 1 + \sqrt{13}}{2} = -1 ; x_1 x_2 = \frac{(-1 - \sqrt{13})(-1 + \sqrt{13})}{4} = \frac{1 - 13}{4} = -3$
- d) $f(x) \cdot f(x+1) = (x^2 + x - 3)(x^2 + 2x + 1 + x + 1 - 3) = (x^2 + x - 3)(x^2 + 3x - 1) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x + 3$
 $f(x^2 + 2x - 3) = (x^2 + 2x - 3)^2 + x^2 + 2x - 3 - 3 = x^4 + 4x^2 + 9 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + x^2 + 2x - 6 =$
 $= x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x + 3$ și se vede egalitatea
- e) $f(-1-x) = (-1-x)^2 - 1 - x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - x - 3 = x^2 + x - 3 = f(x) \quad (\forall)x \in \mathbf{R}$
- f) $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)^2 + x^2 - 2x - 3 - 3 = 0$ și notând $x^2 + 2x - 3 = y$ obțin $y^2 + y - 3 = 0$ cu $y_1 = x_1$ și $y_2 = x_2$ obțin
 $x^2 + 2x - 3 = x_1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 - x_1 = 0$ cu $\Delta_x = 4 + 4(1 + x_1) = 4(2 + x_1) = 6 - 2\sqrt{13} < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ și am
 $x_1 = \frac{-2 - i\sqrt{2\sqrt{13} - 6}}{2} \quad x_2 = \frac{-2 + i\sqrt{2\sqrt{13} - 6}}{2}$ analog se procedează pentru $x^2 + 2x - 3 = x_2$.
- g) Fie α rădăcină oarecare a lui $g \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 3 = 0$. Am $g(\alpha) = (\alpha^2 + \alpha - 3 + \alpha)^2 + \alpha^2 + \alpha - 3 + \alpha - 3 =$
 $= \alpha^2 + \alpha - 3 = 0$ și cum f nu are rădăcini multiple rezultă că g e divizibil cu f adică restul cerut este zero.

Subiectul IV

- a) $f(x) = 3 e^{3x} \ln 3$
- b) $f'(x) > 0 \quad (\forall)x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe \mathbf{R}
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ asimptotă orizontală către $-\infty$
- d) $f'(x) > 2 \quad (\forall)x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow 2 + e^{3x} > 2 \quad \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e^{3x} > 0 \quad (\forall)x \in \mathbf{R}$
- e) $\int_0^1 f(x) dx = \left(2x + \frac{3^{3x}}{3 \ln 3} \right) \Big|_0^1 = 2 + \frac{9}{\ln 3} - \frac{1}{3 \ln 3}$
- f) $f(x) + f(x+1) = 32 \Leftrightarrow 2 + 3^{3x} + 2 + 3^{3x+3} = 32 \Leftrightarrow 3^{3x} + 27 \cdot 3^{3x} = 28 \Leftrightarrow 3^{3x} = 1 \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^0 \Leftrightarrow x=0;$
- g) Fie $g, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 2 + 3 \cdot 3^{3x}$ și $h(x) = 2 \cdot 3^{3x}$. Evident g, h sunt crescătoare și
 $f(x) = g(x) - h(x) \quad (\forall)x \in \mathbf{R}$.