# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D/F**

***Varianta* ….073**

**Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale şi protecția mediului, toate specializările**

**Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea ştiințe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea ştiințe sociale**

**NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore**.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

## SUBIECTUL I ( 20p )

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,5)$.

(4p) **b)** Să se determine partea reală a numărului complex $(5-2i)(-1+2i)$.

(4p) **c)** Să se calculeze lungimea diagonalei pătratului de latură 2.

(4p) **d)** Să se determine $\sin x$, pentru $\cos x = \frac{1}{5}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2p) **e)** Să se arate că expresia $E = \sin^2 x - 3 + \cos^2 x$ nu depinde de $x$.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $M(2,-1)$ şi $N(5,2)$ să fie situate pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.

## SUBIECTUL II ( 30p )

**1.**

(3p) **a)** Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen 3 şi rația 4.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n$ din mulțimea $\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $n^2 - 4 < 0$.

(3p) **c)** Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Să se calculeze $(f \circ f)(-1)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $A^2 + I_2$, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3p) **e)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

**2.** Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x - \frac{1}{x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x), \forall x \in \mathbf{R}^*$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{3x + 1}$.

(3p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției *f*.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea

$G=\{X\in M_2(\mathbf{R})\mid AX=XA\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A\in G$ și $I_2\in G$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul matricei $A$.

(4p) **c)** Să se verifice că $A^2=-I_2$.

(2p) **d)** Să se arate că $A^2X=XA^2$, $\forall X\in M_2(\mathbf{R})$.

(2p) **e)** Să se arate că , dacă $a,b\in\mathbf{R}$, atunci matricea $B=aI_2+bA\in G$.

(2p) **f)** Să se arate că $A^{4n}=I_2$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se calculeze suma elementelor matricei $B=A+A^2+\ldots+A^{2007}$.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f(x)=1+\dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția $f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,0]$.

(2p) **d)** Să se arate că $f(x)\le 2$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(2p) **f)** Să se calculeze ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $f$.

(2p) **g)** Să se determine $x,y\in\mathbf{R}$ pentru care $f(x)+f(y)=4$.

**Varianta 73**

**Subiectul I**

**a)** $AB=\sqrt{13}$ .
**b)** $\mathrm{Re}(z)=-1$ .
**c)** $d=2\sqrt{2}$ .
**d)** $\sin x=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ .
**e)** $E=-2$.
**f)** $a=-1, b=-3$ .

**Subiectul II**

**1.**

**a)** $S_5=55$.

**b)** Probabilitatea cerută este $\dfrac{2}{5}$.

**c)** $f(f(-1))=-5$ .

**d)** $A^2+I_2=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

**e)** $x_1=0, x_2=2$ .

**2.**

**a)** $f'(x)=4+\dfrac{1}{x^2}, x\in \mathbf{R}^*$ .

**b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=5$ .

**c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{3x+1}=\dfrac{4}{3}$ .

**d)** dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției $f$ .

**e)** $\int_1^2 f(x)dx=6-\ln 2$ .

**Subiectul III**

**a)** Evident $A$ comută cu $A$ la înmulțire deci $A\in G$ .

Din $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$, rezultă $I_2 \in G$.

**b)** $\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1$.

**c)** $A^2 = -I_2$.

**d)** Obținem $A^2 X = XA^2 = -X$, $\forall X \in M_2(\mathbf{R})$.

**e)** $BA = (aI_2 + bA)A = aA - bI_2$, $AB = A(aI_2 + bA) = aA - bI_2 \Rightarrow AB = BA \Rightarrow B \in G$.

**f)** $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^4 = I_2 \Rightarrow A^{4n} = (A^4)^n = I_2{}^n = I_2$.

**g)** Din punctul **f)** rezultă $A^{4k} = I_2$, $A^{4k+1} = A$, $A^{4k+2} = -I_2$, $A^{4k+3} = -A, \forall k \in \mathbf{N}^*$.

Deci $A^{4k} + A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3} = O_2$.

Atunci $B = A + A^2 + A^3 + (A^4 + A^5 + A^6 + A^7) + \ldots (A^{2004} + A^{2005} + A^{2006} + A^{2007}) =$
$= A + A^2 + A^3 = A - I_2 - A = -I_2$. Suma elementelor matricei $B$ este -2.

**Subiectul IV**

**a)** $1 + \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1+1}{x^2+1} = \dfrac{x^2+2}{x^2+1} = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

**b)** $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

**c)** $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$. Rezultă că funcția $f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$.

**d)** $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{x^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2$ $(A)$.

**e)** $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = (x + arctgx)\Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4}$.

**f)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) = 1$, deci $y = 1$ este ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**g)** Din punctul **d**), rezultă $f(x) \leq 2, \forall x \in \mathbf{R}$ și $f(y) \leq 2, \forall y \in \mathbf{R}$. Adunând cele două relații, rezultă $f(x) + f(y) \leq 4, \forall x, y \in \mathbf{R}$, cu egalitate dacă și numai dacă $f(x) = 2$ și $f(y) = 2$. Rezultă $x = y = 0$.