EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D/F

***Varianta* ….072**

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(2,4)$ la punctul $B(5,7)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $cos^2 2006 + sin^2 2006$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{3}$.

(4p) **d)** Să se determine conjugatul numărului complex $-2-3i$.

(2p) **e)** Să se calculeze $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(2,4)$ și $B(5,7)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.

(2p) **f)** Să se calculeze BC ,dacă în triunghiul ABC, $AB = 5, AC = 2$ și $m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $n^2 < 24$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x - 27 = 0$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația $\log_6 x = -1$.

(3p) **e)** Să se calculeze expresia $E = C_6^1 - C_6^5 + C_6^6$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x+2006}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0,\infty)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numărul real $\omega = 1 - \sqrt{2}$ şi mulțimea $M = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Notăm $\overline{\omega} = 1 + \sqrt{2}$ şi cu $G = \{z \in M \mid \exists\, y \in M \text{ astfel încât } y \cdot z = 1\}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $0 \in M$ şi $1 \in M$.

(4p) **b)** Să se arate că $\omega^2 = 2\omega + 1$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $z, y \in M$, atunci $z \cdot y \in M$.

(2p) **d)** Să se arate că $(a + b\omega)(a + b\overline{\omega}) \in \mathbf{Z}$, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$.

(2p) **e)** Să se arate că $\omega \in G$.

(2p) **f)** Să se arate că mulțimea G are cel puțin 2007 elemente.

(2p) **g)** Să se arate că $\omega^{2007} \notin \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3 + 2^{-2x}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ şi $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(2p) **e)** Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se verifice identitatea $f'(x) = \frac{1}{2}\left((f'(x))^2 + f'(x) + 1\right) - \frac{1}{2}\left((f'(x))^2 - f'(x) + 1\right)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că există două funcții $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, strict crescătoare, astfel încât $f(x) = g(x) - h(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 072

Subiectul I

a) $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

b) $\cos^2 2006 + \sin^2 2006 = 1$

c) Aria este $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

d) $z = -2 - 3i \Rightarrow \overline{z} = -2 + 3i$

e) Obțin sistemul $\begin{cases} 2 + 4a + b = 0 \\ 5 + 7a + b = 0 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

f) Aplicând teorema lui Pitagora am $BC = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -40 + 42 = 2$

b) Deoarece numai 1, 2, 3, 4 verifică inegalitatea, probabilitatea cerută este $\frac{4}{5}$

c) $3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$

d) $\log_6 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

e) $E = C_6^1 - C_6^5 + C_6^6 = C_6^1 - C_6^1 + C_6^6 = 1$

2.

a) $f'(x) = \frac{-1}{(x + 2006)^2}, (\forall) x > 0$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{-1}{2007^2}$

c) Din a) $f'(x) < 0, (\forall) x > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$

d) $\int_1^2 f(x)dx = [3x + \ln(x + 2006)]\Big|_1^2 = 6 + \ln 2008 - 3 - \ln 2007 = 3 + \ln\frac{2008}{2007}$

e) $\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{n \to \infty} \left(3 + \frac{1}{n + 2006}\right) = 3$

Subiectul III

a) $0 = 0 + 0 \cdot \omega$ şi $1 = 0 + 1 \cdot \omega$ deci $0 \in M, 1 \in M$.

b) $\omega^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} - 1 = 4(2 - \sqrt{3}) - 1 = 4\omega - 1$

c) Fie $z, x \in M \Rightarrow (\exists) a, a', b, b' \in \mathbf{Z}$ cu $z = a + b\omega$ ş i $y = a' + b'\omega$

Am $z+y=(a+a')+(b+b')\omega\in M$ şi

$z\cdot y=a\cdot a'+(a\cdot b'+a'\cdot b)\omega+b\cdot b'\omega^2=a\cdot a'+(a\cdot b'+a'\cdot b)\omega+b\cdot b'(4\omega-1)=(a\cdot a'-b\cdot b')+$ $(a\cdot b'+a'\cdot b+4b'b)\omega\in M$.

d) $(a+b\omega)(a+b\overline{\omega})=a^2+b^2\omega\overline{\omega}+ab(\omega+\overline{\omega})=a^2+b^2+4ab\in\mathbf{Z}$ căci $a,b\in\mathbf{Z}$

e) $\omega=0+1\cdot\omega\in M$, $\overline{\omega}=4-\omega\in M$ şi cum $\omega\overline{\omega}=1$ rezultă $\omega\in G$.

f) Deoarece $\omega\in G$ rezultă $\omega\cdot\omega=\omega^2\in G$ şi prin inducție $\omega^n\in G(\forall)n\in\mathbf{N}^*$. Atunci $\{\omega,\omega^2,...,\omega^{2006}\}\subset G$ şi $\omega^i\neq\omega^j\,(\forall)i\neq j$. Deci G conține cel puțin 2006 elemente.

g) $\omega^{2006}=(2-\sqrt{3})^{2006}=C_{2006}^0 2^{2006}+C_{2006}^2 2^{2004}\cdot 3+...+C_{2006}^{2006}3^{1003}-\sqrt{3}(C_{2006}^1 2^{2005}+$ $C_{2006}^3 2^{2003}\cdot 3+...+C_{2006}^{2005}2\cdot 3^{1002})=a-b\sqrt{3}$

cu $b\neq 0$ şi a,b$\in$ **Q**; deci $\omega^{2006}\notin\mathbf{Q}$.

Subiectul IV

a) $f'(x)=-2\cdot 2^{-2x}\ln 2,(\forall)x\in\mathbf{R}$

b) $f'(x)<0,(\forall)x\in\mathbf{R}$ evident (din a)) si $f(x)>0,(\forall)x\in\mathbf{R}$ (din imaginea exponențială)

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=3\Rightarrow y=3$ asimptotă orizontală pentru f către $+\infty$

d) $\int_0^1 f(x)dx=\left(3x-\frac{e^{-2x}}{2\ln 2}\right)\Bigg|_0^1=3-\frac{1}{2e\ln 2}+\frac{1}{2\ln 2}$

e) $f'(x)<0,(\forall)x\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe **R**

f) $\frac{1}{2}\left((f'(x))^2+f'(x)+1\right)-\frac{1}{2}\left((f'(x))^2-f'(x)+1\right)=$
$=\frac{1}{2}(f'(x))^2+\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(f'(x))^2+\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2}=f'(x),(\forall)x\in\mathbf{R}$

g) De exemplu : $g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=3-2^{-2x}$ si $h(x)=-2\cdot 2^{-2x}$ sunt strict crescătoare pe **R** şi am $f(x)=g(x)-h(x),(\forall)x\in\mathbf{R}$