

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta071

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(4, 6)$, $C(6, 2)$.

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul A la punctul B .
- (4p) b) Să se calculeze $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(2, 4)$ și $C(6, 2)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.
- (2p) e) Să se calculeze $\operatorname{tg}^2 45^\circ$.
- (2p) f) Să se determine conjugatul numărului complex $3i^2 - 4i$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}$.
 - (3p) b) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Să se calculeze $f(f(2))$.
 - (3p) c) Să se determine probabilitatea ca un element n al mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $3^n \leq n^3$.
 - (3p) d) Să se calculeze C_5^2 .
 - (3p) e) Să se rezolve ecuația $3^x = 27$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.
- (3p) a) Să se calculeze $f(1)$.
 - (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
 - (3p) d) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 071

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze $\det(A)$.
- (4p) b) Să se calculeze A^2 .
- (4p) c) Să se calculeze $(I_2 + A)^2$.
- (2p) d) Să se calculeze $\det(I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2007})$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $X \in M_2(\mathbb{C})$ și $XA = AX$, atunci X este de forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
- (2p) f) Să se rezolve, în mulțimea numerelor complexe, ecuația $x^4 - 1 = 0$.
- (2p) g) Să se calculeze suma elementelor matricei A^{2007} .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

$x_n = f(1^2) + f(2^2) + \dots + f(n^2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(2^n)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x > 0$.
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n)}{n+1}$.
- (2p) d) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- (2p) e) Să se arate că $x_n = 2 \ln n!$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (2p) g) Să se arate că dacă numerele strict pozitive a, b, c sunt în progresie geometrică, atunci numerele $f(a), f(b), f(c)$ sunt în progresie aritmetică.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 071

Varianta 71

Subiectul I

- a) $AB = 2\sqrt{2}$.
- b) $a = 2$ și $b = -10$.
- c) $S_{ABC} = 6$.
- d) Mijlocul M al segmentului $(AB) \Rightarrow M(3,5)$.
- e) $\operatorname{tg}^2 45^\circ = 1$.
- f) $\bar{z} = -3 + 4i$.

Subiectul II

1.

- a) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{115}{144}$.
- b) $f(f(2)) = 5$.

c) $p = \frac{1}{4}$.

d) $C_5^2 = 10$.

e) $x = 3$.

2.

a) $f(1) = -2$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3, x \in \mathbf{R}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.

d) $x = \pm 1$.

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{3}$.

Subiectul III

a) $\det A = -1$.

b) $A^2 = I_2$.

c) Deoarece $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$ se poate aplica binomul lui Newton.

$$(I_2 + A)^2 = I_2 + 2A \cdot I_2 + A^2 = 2(A + I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) $I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2007} = I_2 + A + I_2 + A + \dots + I_2 + A =$

$$= 1004(I_2 + A) = \begin{pmatrix} 1004 & 1004 \\ 1004 & 1004 \end{pmatrix}, \text{ deci } \det(I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2007}) = 0.$$

e) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$; $AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow b = c \text{ și } a = d \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$

f) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$ sau $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow S = \{-i, i, -1, 1\}.$

g) $A^{2007} = A^{2006} \cdot A = (A^2)^{1003} \cdot A = I_2 \cdot A = A \Rightarrow$ suma elementelor matricei A^{2007} este 2.

Subiectul IV

a) $f(2^n) = n \ln 2.$

b) $f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n)}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{n+1} = \ln 2.$

d) $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \ln x dx = e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$

e) $x_n = f(1^2) + f(2^2) + \dots + f(n^2) = \ln 1^2 + \ln 2^2 + \dots + \ln n^2 = 2 \ln 1 + 2 \ln 2 + \dots + 2 \ln n = 2 \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = 2 \ln n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$ f)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

g) Numerele strict pozitive a, b, c formează o progresie geometrică $\Rightarrow b^2 = a \cdot c$ și logaritmând avem $\ln b^2 = \ln(a \cdot c) \Rightarrow 2 \ln b = \ln a + \ln c \Rightarrow \ln b = \frac{\ln a + \ln c}{2}$, adică numerele $\ln a = f(a), \ln b = f(b)$ și $\ln c = f(c)$ formează o progresie aritmetică.