

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta070

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al dreptelor de ecuații $2x + y - 1 = 0$ și $x - y - 2 = 0$.
- (4p) b) Să se determine partea reală a numărului complex $(2-i)(1+i)$.
- (4p) c) Să se calculeze numărul complex $i^4 + i^8 + i^{12}$.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC , determinat de punctele $A(-1, -1)$, $B(-2, -3)$ și $C(2, 3)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\sin x$, pentru $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 2$. Să se calculeze $f(\sqrt{5}) \cdot f(-\sqrt{5})$.
- (3p) b) Să se rezolve ecuația $\frac{x+1}{2} = \frac{x^2 + 3x + 2}{3}$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Se consideră legea de compozitie $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$. Să se arate că $e = 3$ este elementul neutru pentru legea „*”.
- (3p) d) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 7$. Să se arate că $f(x) \geq 3$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) e) Să se calculeze A^3 , dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = -4x^2 + x - 5$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 4}$.
- (3p) d) Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$.

- (4p) a) Să se calculeze $\det(B)$.
- (4p) b) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.
- (4p) c) Să se verifice că $A^2 = 13A$.
- (2p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$.
- (2p) e) Să se calculeze matricea $A \cdot B - B \cdot A$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice să se demonstreze că $A^n = 13^{n-1} A, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se demonstreze că matricea $A + A^2 + \dots + A^{2006} - A^{2007}$ are toate elementele negative.

SUBIECTUL IV(20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - x^4 + x^8$.

- (4p) a) Să se verifice că $f(x) = \frac{x^{12} + 1}{x^4 + 1}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{1+x^4}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se determine coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f .
- (2p) e) Să se arate că $f(x) \geq \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Notăm cu $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a funcției f .
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{F(x)}$.
- (2p) h) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

Varianta 70

SUBIECTUL I

- a) $P(1, -1)$.
- b) Rez=3.
- c) $i^4 + i^8 + i^{12} = 3$.
- d) $S_{ABC} = 1$.
- e) $\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.
- f) $\sin x = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $f(\sqrt{5}) \cdot f(-\sqrt{5}) = -1$.
- b) $x_1 = -1$ și $x_2 = -\frac{1}{2}$.
- c) elementul neutru este 3.
- d) $f(x) \geq 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$, (A) $\forall x \in \mathbf{R}$
- e) $A^3 = O_2$.

2.

- a) $f'(x) = -8x + 1$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -7$.
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 4} = -4$.
- d) $\left(\frac{1}{8}, -\frac{79}{16}\right)$ sunt coordonatele punctului de extrem local.
- e) $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{35}{6}$.

SUBIECTUL III

- a) $\det(B) = 3$.
- b) Ecuația devine: $2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{3}{2}$.
- c) $A^2 = 13A$

d) Soluția sistemului este: $S = \{(-2, -6)\}$.

e) $A \cdot B - BA = \begin{pmatrix} 22 & 2 \\ 24 & -22 \end{pmatrix}$.

f) Pentru $n=1$ relația este adevărată. Presupunem relația adevărată pentru $n=k$, adică $A^k = 13^{k-1} A$ și o demonstrăm pentru $n=k+1$, adică $A^{k+1} = 13^k A$; $k \in \mathbb{N}^*$. Dar

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = 13^{k-1} A \cdot A = 13^{k-1} A^2 = 13^{k-1} 13A = 13^k A.$$

g) $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2006} - A^{2007} = (1 + 13 + \dots + 13^{2005} - 13^{2006}) \cdot A =$

$$\left(\frac{13^{2006} - 1}{12} - 13^{2006} \right) \cdot A, \text{ matrice care are toate elementele negative.}$$

SUBIECTUL IV

a) Calculăm: $f(x) \cdot (x^4 + 1) = (1 - x^4 + x^8)(x^4 + 1) = x^{12} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{x^{12} + 1}{x^4 + 1} \geq \frac{1}{x^4 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f'(x) = 4x^3(2x^4 - 1)$.

d) Alcătuind tabelul de variație al funcției $f \Rightarrow$ Punctele de extrem local sunt:

$$A\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{3}{4}\right), B(0, 1) \text{ și } C\left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{3}{4}\right).$$

e) $f(x) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4 - 4x^4 + 4x^8 \geq 3 \Leftrightarrow (2x^4 - 1)^2 \geq 0$, adevărat $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^9 - x^5 + x}{9} - \frac{x^5}{5} + x + C}{x^9 - x^5 + x} = 9$.

g) $\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{x^9}{9} - \frac{x^5}{5} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{41}{45}$.