

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta069

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(3, -2)$ la punctul $B(-2, 3)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos^2 122 + \sin^2 122$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{7}$.
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex $-4 - i$.
- (2p) e) Să se calculeze $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3, -2)$ și $B(-2, 3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC , $AB = 4, AC = 5$ și $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$, să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 23 & -5 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n^3 < 20$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $25^x - 5 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația $\log_7 x = -2$.
- (3p) e) Să se calculeze expresia $E = C_6^2 - C_6^4 + C_6^6$.
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+20} + 1$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n - 23}{23n + 11}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_1(x) = x^2 + 2x$ și $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $f_1(x) = 0$.
- (4p) b) Să se verifice egalitatea $f_1(x) = (x+1)^2 - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $f_2(x) = (x+1)^2 - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că
 $f_n(x) = (x+1)^{2^n} - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se verifice că $f_n(-1) = -1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că $f_n(x) \geq -1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + 3 = 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$
- (2p) f) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f(x) + f(x^2) + f(x^3) = 3$.
- (2p) g) Să se arate că $e^{\frac{1}{2007}} < \frac{2007}{2006}$.

Varianta 69**SUBIECTUL I**

- a) $AB = 5\sqrt{2}$.
- b) $\cos^2 122 + \sin^2 122 = 1$.
- c) $S = \frac{7\sqrt{3}}{4}$.
- d) $\bar{z} = -4 + i$
- e) $a = 1, b = -1$
- f) $BC = \sqrt{41}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) Determinantul este egal cu -20 .

- b) $p = \frac{2}{5}$.

- c) $x = \frac{1}{2}$.

- d) $x = \frac{1}{49}$.

- e) $E = 1$.

2.

- a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+20)^2}$.

- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{441}$.

- c) $f'(x) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare pe $(0, \infty)$.

- d) $\int_1^2 f(x) dx = 1 + \ln \frac{22}{21}$.

- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n - 23}{23n + 11} = \frac{11}{23}$.

SUBIECTUL III

- a) $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = -2$.
- b) Calcul direct.

c) $f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1(f_1(x)) \stackrel{b)}{=} f((x+1)^2 - 1) \stackrel{b)}{=} (x+1)^{2^2} - 1.$

d) Fie $P(n): f_n(x) = (x+1)^{2^n} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(1): f_1(x) = (x+1)^2 - 1$ (A).

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$P(k): f_k(x) = (x+1)^{2^k} - 1$; $P(k): f_{k+1}(x) = (x+1)^{2^{k+1}} - 1$.

$$f_{k+1}(x) = (f_1 \circ f_k)(x) = f_1((x+1)^{2^k} - 1) = ((x+1)^{2^k} - 1 + 1)^2 - 1 = (x+1)^{2^{k+1}} - 1.$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) Din e) $\Rightarrow f_n(-1) = (-1+1)^{2^n} - 1 = -1$.

f) Dacă $n \in \mathbb{N}$ ⇒ 2^n este număr par ⇒ $(x+1)^{2^n} \geq 0 \Rightarrow f_n(x) \geq -1$.

g) Din f) ⇒ $f_1(x) \geq -1$, $f_2(x) \geq -1$, $f_3(x) \geq -1 \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + 3 \geq 0$ cu egalitate pentru $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = -1 \Rightarrow x = -1$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 1 - e^{-x}$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ și $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

c) Din b) ⇒ $x = 0$ este punct de minim global ⇒ $f(x) \geq f(0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ funcția f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$. Căutăm

asimptote oblice: $y = mx + n$; $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^{-x}}{x} \stackrel{l'H}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x}) = 1$;

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow y = x$$
 este asimptotă oblică spre $+\infty$.

e) $\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - e^{-x} \right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{e}$.

f) Din c) ⇒ $f(x) \geq 1, f(x^2) \geq 1, f(x^3) \geq 1$ cu egalitate pentru $x=0 \Rightarrow x=0$ soluție unică.

g) Din c) ⇒ $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x + e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 - x \Leftrightarrow e^x \leq \frac{1}{1-x}, \forall x \in \mathbb{R}$, cu egalitate

pentru $x=0$. Pentru $x = \frac{1}{2007} \Rightarrow e^{\frac{1}{2007}} < \frac{2007}{2006}$.