

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta068

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze lungimea diagonalei unui dreptunghi cu lungimile laturilor de 8 și 6.
- (4p) b) Să se calculeze aria unui pătrat, având perimetru de 16.
- (4p) c) Să se calculeze distanța de la punctul $A(6,5)$ la punctul $B(2,3)$.
- (4p) d) Să se calculeze simetricul punctului $A(6,5)$ față de punctul $B(2,3)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\sin^2 x$, pentru $\cos x = \frac{1}{2}$.
- (2p) f) Să se calculeze aria triunghiului ABC dacă $AC = 6$, $BC = 4$ și $\sin C = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze produsul soluțiilor ecuației $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$.
- (3p) b) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^3 - 4X^2 + X + 1$ la $g = X - 1$.
- (3p) c) Să se determine conjugatul numărului complex $z = (2+i)^2$.
- (3p) d) Să se determine numerele naturale x astfel încât $4x+3 \geq 5x-2$.

- (3p) e) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ să se calculeze matricea $A \cdot B$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(f(1))$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^4 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^2}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră legea de compoziție „ \circ ”, definită pe \mathbf{R} , $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se verifice că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- (4p) c) Să se verifice că $x \circ (-x) = -1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se determine simetricul elementului $x = 0$ în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} = \sqrt[3]{nx^3 - (n-1)}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că $\frac{x}{y} \circ \frac{y}{x} \neq -1$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^*$.
- (2p) g) Să se calculeze $(-100) \circ (-99) \circ \dots \circ (99) \circ (100)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)}$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (4p) c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) f) Să se demonstreze că pentru orice $x \in [0, \infty)$, $0 < f(x) \leq \frac{2}{3}$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5}) + \dots + f(\sqrt{2n+1}))$.

Varianta 68

SUBIECTUL I

- a) $d = 10$.
- b) $S = 16$.
- c) $AB = 2\sqrt{5}$.
- d) Dacă C este simetricul lui A față de B $\Rightarrow C(-2,1)$.
- e) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- f) $S_{ABC} = 6$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$.
- b) Restul este $f(1) = -1$.
- c) $\bar{z} = 3 - 4i$.
- d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- e) $A \cdot B = 2B$.

2.

- a) $f(f(1)) = 2 + \sqrt{2}$.
- b) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$.
- d) $\int_1^4 f(x) dx = \frac{73}{6}$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^2} = 0$.

SUBIECTUL III

- a) $(x \circ y) \circ z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1} \circ z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2}$ (1).
 $x \circ (y \circ z) = x \circ \sqrt[3]{y^3 + z^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2}$ (2).
Din (1) și (2) rezultă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$
- b) $\exists e \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Relație echivalentă cu
 $\sqrt[3]{x^3 + e^3 - 1} = \sqrt[3]{e^3 + x^3 - 1} = x \Rightarrow e = 1 \in \mathbf{R}$.

c) $x \circ (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3 - 1} = \sqrt[3]{-1} = -1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

d) Fie $0'$ simetricul elementului 0

$$\Rightarrow 0 \circ 0' = 0' \circ 0 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0^3 + 0'^3 - 1} = \sqrt[3]{0^3 + 0^3 - 1} = 1 \Rightarrow 0' = \sqrt[3]{2} \in \mathbf{R}.$$

e) Fie $P(n)$: $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = \sqrt[3]{nx^3 - (n-1)}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

$$P(1): x = x \text{ (A).}$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k \text{ ori}} = \sqrt[3]{kx^3 - (k-1)}, \text{ iar } P(k+1): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = \sqrt[3]{(k+1)x^3 - k}.$$

$$\text{Dar } \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = \left(\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k \text{ ori}} \right) \circ x = \overset{P(k)}{\left(\sqrt[3]{kx^3 - (k-1)} \right)} \circ x = \sqrt[3]{(k+1)x^3 - k}.$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) Presupunem că $\exists x, y \in \mathbf{R}^*$ astfel încât $\frac{x}{y} \circ \frac{y}{x} = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} - 1} = -1 \Leftrightarrow$

$$\frac{x^6 + y^6}{x^3 y^3} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ (F)} \Rightarrow \text{Presupunerea facută este falsă}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \circ \frac{y}{x} \neq -1, \forall x, y \in \mathbf{R}^*.$$

g) Legea „ \circ ” fiind asociativă și comutativă avem

$$\text{că: } (-100) \circ (-99) \circ \dots \circ 99 \circ 100 = [(-100) \circ 100] \circ [(-99) \circ 99] \circ [(-1) \circ 1] \circ 0 =$$

$$= \underbrace{(-1) \circ (-1) \circ \dots \circ (-1)}_{\text{de } 100 \text{ ori } (-1)} \circ 0 = \overset{e)}{\sqrt[3]{100(-1)^3 - 99}} \circ 0 = -\sqrt[3]{200}.$$

SUBIECTUL IV

a) Calcul direct.

b) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3} dx = \frac{\pi(9 - 2\sqrt{3})}{36}.$

c) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-8x(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 3)^2}.$

d) Deoarece $f'(x) \leq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow$ functia f este descrescătoare pe $[0, +\infty)$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} = 0.$

f) Folosind **d** și **e**) $\Rightarrow 0 < f(x) \leq f(0) = \frac{2}{3}$.

g) $f(1) + f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + \dots + f(\sqrt{2n+1}) =$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \dots + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+4}$. De unde limita cerută este $\frac{1}{2}$.