

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta067

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{3}$.
- (4p) b) Să se determine numărul real a , astfel încât punctele $A(1,2)$, $B(-1,0)$ și $C(0,a)$ să fie coliniare.
- (4p) c) Să se calculeze lungimea înălțimii din M a triunghiului MNP dacă $NP = 10$ și aria este egală cu 20.
- (4p) d) Să se calculeze coordonatele punctului T , mijlocul segmentului $[NP]$, unde $N(1,2)$, $P(3,2)$.
- (2p) e) Să se calculeze lungimea medianei din M a triunghiului MNP , dacă $M(2,4)$, $N(1,2)$ și $P(3,2)$.
- (2p) f) Să se determine numărul real b dacă $S(2,3)$, $Q(3,b)$ și $\overrightarrow{SQ} = \vec{i} + \vec{j}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $A = \{10, 11, \dots, 30\}$.

- (3p) a) Să se calculeze suma elementelor mulțimii A .
- (3p) b) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii A .
- (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii A să fie divizibil cu 3.
- (3p) d) Să se determine numărul elementelor mulțimii A , divizibile cu 5.

- (3p) e) Să se calculeze C_{10}^3 .

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) c) Să se arate că $f'(x) \geq 2$, $\forall x \in (0, \infty)$.

- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^e \left(f(x) - \frac{x^2}{2} \right) dx$.

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimile $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{C} \right\}$,

$G' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}, a^2 + 3b^2 = 1 \right\}$. Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm $'X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei A , dacă $A \in G'$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $A, B \in G'$, atunci $A \cdot B \in G'$.
- (4p) c) Să se demonstreze că dacă $A \in G'$, atunci $\det(A - 'A) \geq 0$.
- (2p) d) Să se determine matricea $A \in G'$ cu proprietatea că $'A \in G'$.
- (2p) e) Să se calculeze matricea P^4 .
- (2p) f) Să se determine matricele $A \in G$ cu proprietatea că $(A + 'A)^2 = 4I_2$.
- (2p) g) Să se calculeze matricea $(A - 'A)^{4n}$, dacă $A \in G$ și $n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g, h : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 3^x + 3x$, $g(x) = x^e + e^x + ex$, $h(x) = g(x) - ex$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(2)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3 - 3x}{g(x) - x^e - ex}$.
- e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că
- (2p) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \geq 1$.
- (2p) g) Să se arate că $h(1) + h(2) + \dots + h(n) \leq \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3(3^n - 1)}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 67

SUBIECTUL I

- a) $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- b) $a = 1$.
- c) $d(M, NP) = 4$.
- d) Punctul T este mijlocul segmentului $(NP) \Rightarrow T(2, 2)$.
- e) mediana din M este $MT = 2$.
- f) $b = 4$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $10 + 11 + \dots + 30 = 420$.
- b) Numărul elementelor mulțimii A este 21.
- c) $p = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.
- d) În mulțime sunt 5 numere divizibile cu 5.
- e) $C_{10}^3 = 120$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{1}{x} + x$.
- b) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.
- c) $f'(x) \geq 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2, (\text{A}) \quad \forall x > 0$.
- d) $\int_1^e \left(f(x) - \frac{x^2}{2} \right) dx = 1$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

- a) $\det(A) = a^2 + 3b^2 = 1$.
- b) Fie $A, B \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ și
 $\det(A) = \det(B) = 1$. Atunci $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - 3bd & ad + bc \\ -3bc - 3ad & -3bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -3\beta & \alpha \end{pmatrix}$,

unde $\alpha = ac - 3bd$, $\beta = ad + bc$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, iar $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 1$
 $\Rightarrow A \cdot B \in G'$.

c) $A^{-t}A = \begin{pmatrix} 0 & 4b \\ -4b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^{-t}A) = 4b^2 \geq 0$.

d) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \in G' \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \in G' \Leftrightarrow b = -3(-3b)$ și
 $a^2 + 3b^2 = 1 \Rightarrow a = 1, b = 0$.

e) $P^4 = I_2$.

f) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \Rightarrow A + {}^tA = 2 \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$. $(A + {}^tA)^2 = 4I_2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4 \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = 4I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$, de unde obținem matricele:
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

g) Din c) $\Rightarrow A^{-t}A = \begin{pmatrix} 0 & 4b \\ -4b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-t}A)^2 = -16b^2 I_2$
 $\Rightarrow (A^{-t}A)^4 = 2^8 b^4 I_2 \Rightarrow (A^{-t}A)^{4n} = 2^{8n} b^{4n} I_2$.

SUBIECTUL IV

a) $f(2) = 23$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 3^x \ln 3 + 3$.

c) $\int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{33}{4} + \frac{6}{\ln 3}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3 - 3x}{g(x) - x^e - ex} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{e^x} = \infty$.

e) Fie $P(n): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

$P(1): 1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} (\text{A})$.

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$P(k): 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, iar

$$P(k+1): 1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \text{ Dar}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 \stackrel{P(k)}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f) Pentru $x \geq 1$ avem: $x^3 \geq x^e$, $3^x \geq e^x$ și $3x \geq ex \Rightarrow$ adunând aceste inegalități $f(x) \geq g(x), \forall x \geq 1$

g) $h(x) = x^e + e^x \leq x^3 + 3^x, \forall x \geq 1$, de unde

$$h(1) + h(2) + \dots + h(n) \leq 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3(3^n - 1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$