Ministerul Educaţiei şi Cercetării – Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D/F

Varianta ….**066**

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările
Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea ştiinţe sociale;Filiera vocaţională:profil Militar, specializarea ştiinţe sociale
NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului având lungimile laturilor 12 , 5 şi 13 .

(4p) **b)** Să se calculeze distanţa de la punctul $D(1,-2)$ la punctul $E(0,1)$.

(4p) **c)** Să se calculeze conjugatul numărului complex $z=-1-4i$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(4,2)$, $M(3,3)$ şi $N(2,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze perimetrul pătratului cu aria 100.

(2p) **f)** Să se calculeze $\cos x$, ştiind că $\sin x=\frac{1}{4}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine restul împărţirii polinomului $f=2X^3-4X^2+5X-1$ la polinomul $X+1$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $x\in\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relaţia $2^x\le 10$.

(3p) **c)** Dacă funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-2$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(0)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale , ecuaţia $\log_2(2x^2+7)=\log_2(x^4+8)$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului $f=X^3-X$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x)=x^3+x-2007$,

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se arate că f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$.

(3p) **d)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$, ecuaţia $f'(x)=4$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

(4p) **a)** Să se verifice identitatea $xy-\frac{1}{xy}-\left(x+y-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy}$, $\forall x, y\in \mathbf{R}^*$.

(4p) **b)** Să se rezolve în $\mathbf{R}^*$ ecuația $x^3-\frac{1}{x^3}=x+x^2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

(4p) **c)** Să se arate că $ab-\frac{1}{ab}\geq a+b-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$, $\forall a,b\in[1,\infty)$.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n\in \mathbf{N}^*, \forall a_1,a_2,...,a_n\in[1,\infty)$, avem $a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n-\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n}\geq a_1+a_2+...+a_n-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-...-\frac{1}{a_n}$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $a,b,c\in[0,\infty)$, atunci $2^{a+b+c}-2^{-a-b-c}\geq 2^a+2^b+2^c-2^{-a}-2^{-b}-2^{-c}$.

(2p) **f)** Să se arate că, dacă $x>y>0$, atunci $x-\frac{1}{x}>y-\frac{1}{y}$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $a\in[1,\infty)$, atunci $a^n-\frac{1}{a^n}\geq n\left(a-\frac{1}{a}\right)$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,definite prin $f_0(x)=1$ și $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt$, $\forall n\in\mathbf{N}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $f_1(x)=x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f_2(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $f_1(x)+f_2(x)=0$.

(2p) **d)** Să se arate că $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că $f'_{n+1}(x)=f_n(x), \forall x\in\mathbf{R}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f_3(x)}{f_2(x)}$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} f_n(1)$.

Varianta 066

Subiectul I

a) Aria cerută este $\frac{12\cdot 5}{2}=30$ deoarece triunghiul este dreptunghic cu ipotenuza 13

b) $DE=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

c) $z=-1-4i \Rightarrow \overline{z}=-1+4i$

d) Deoarece $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L, M, N$ coliniare

e) Evident latura este 10 si perimetrul 40

f) $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = \frac{15}{16}$ şi cum $x \in (0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos x > 0$ adica $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Subiectul II

1.

a) Restul este $f(-1)=-2-4-5-1=-12$

b) Deoarece 0,1,2,3 verifică, probabilitatea cerută este $\frac{4}{5}$

c) Evident $g(x)=x+2 \Rightarrow g(0)=2$

d) Ecuația este echivalentă cu :

$2x^2+7=x^4+8 \Leftrightarrow x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

e) Suma este 0

2.

a) $f'(x)=3x^2+1$

b) $f'(x)>0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe **R**

c) $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)=13$

d) $f'(x)=4 \Leftrightarrow 3x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm 1$

e) $\int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-2007x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2007=\frac{-8025}{4}$

Subiectul III

a) Egalitatea se verifică prin calcul direct

b) Ecuația este echivalenta cu $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1-\frac{1}{x}-x-1\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\\ \quad sau\\ \quad x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}=0\end{cases}$$

Notând în a doua ecuație $x+\frac{1}{x}=t$, obțin $t^2-t-2=0;\Delta_t=1+8=9;t_1=2;t_2=-1$

$x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$ si $x+\frac{1}{x}=-1\Leftrightarrow x^2+x+1=0$ si $x\notin\mathbf{R}$

Concluzie $x=\pm1$

c) Folosind a) am $ab-\frac{1}{ab}=a+b-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{(a-1)(b-1)(ab-1)}{\underset{\geq 0}{ab}}\geq a+b-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

d) Pentru n=2 aplic c).

e) Pentru n=3 am: $a_1a_2a_3-\frac{1}{a_1a_2a_3}\geq a_1+a_2+a_3-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}$, apoi $a_1=2^a$, $a_2=2^b,a_3=2^c$ vor conduce la inegalitatea cerută

f) Inegalitatea este echivalentă cu: $x-y+\frac{x-y}{xy}>0$ sau $(x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)>0$ care este adevărată

g) Punem $a_1=...=a_n=a$ în egalitatea de la d) şi rezultă $a^n-\frac{1}{a^n}\geq n\left(a-\frac{1}{a}\right)$

Subiectul IV

a) $f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt=x\Big|_0^x=x(\forall)x\in\mathbf{R}$

b) $f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^x=\frac{x^2}{2}$

c) Ecuația devine $\frac{x^2}{2}+x=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=-2$

d) Inducție după n. Pentru n=1 vezi a). Presupun $f_n(x)=\frac{x^n}{x!}$ si am $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt=$

$=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_0^x=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Deci $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}(\forall)n\geq1,n\in\mathbf{N}$

e) $f_{n+1}'(x)=\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)'=\frac{x^n}{n!}=f_n(x),(\forall)n\in N,(\forall)x\in\mathbf{N}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_3(x)}{f_2(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{2!}{x^2}=+\infty$

g) $f_n(1)=\frac{1}{n!};\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(1)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0$