

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta065

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze lungimea laturii unui triunghi echilateral cu perimetrul 33.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea laturii AC ,dacă în triunghiul ABC , $BC = 5$, $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și $\sin B = \frac{3}{5}$,
- (4p) c) Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,2)$ la punctul $B(0,1)$.
- (4p) d) Să se calculeze conjugatul numărului complex $2 + 3i$.
- (2p) e) Să se calculeze $\cos x$, dacă $\sin x = \frac{2}{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (2p) f) Să se calculeze $\cos A$,dacă în triunghiul ABC avem $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$,

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$ și $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 3 - 2x$.
- (3p) a) Să se calculeze $(f \circ g)(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor f și g .
- (3p) c) Să se calculeze $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.
- (3p) d) Să se rezolve inecuația $(f(x))^2 \geq (g(x))^2$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) e) Să se arate că $\sqrt{f(3) + g(3)} \in \mathbf{N}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
- (3p) b) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (3p) c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot f(x))$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Pe mulțimea \mathbf{C} a numerelor complexe se consideră legea de compoziție “ \circ ”, definită prin $x \circ y = xy + 3ix + 3iy - 9 - 3i$, pentru orice $x, y \in \mathbf{C}$.

- (4p) a) Să se arate că $x \circ y = (x + 3i)(y + 3i) - 3i$, pentru orice $x, y \in \mathbf{C}$.
- (4p) b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbf{C}$.
- (4p) c) Să se verifice că dacă $e = 1 - 3i$, atunci $x \circ e = x$, pentru orice $x \in \mathbf{C}$.
- (2p) d) Să se determine două elemente $a, b \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, astfel încât $a \circ b \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x + 3i)^n - 3i$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$ și $x \in \mathbf{C}$.
- (2p) f) Dacă $z = \underbrace{4 \circ 4 \circ \dots \circ 4}_{\text{de 2007 ori}}$, să se calculeze conjugatul numărului complex $z + 3i$.
- (2p) g) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, ecuația $x \circ x = -3i$.

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, cu $f_0(x) = e^x + e^{-x}$ și

$$f_{n+1}(x) = f'_n(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se arate că $f_0(-x) = f_0(x), \forall x \in \mathbf{R}$
- (4p) b) Să se demonstreze că $f_0(x) \geq 2, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $f_1(x), x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $\forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$,
$$f_{2k}(x) = f_0(x) \text{ și } f_{2k+1}(x) = f_1(x).$$
- (2p) e) Să se arate că $\int_0^x f_1(t) dt = f_0(x) - 2, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 (f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_{2007}(x)) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0(0) + f_1(0) + \dots + f_n(0)}{n}$.

Variantă 65

SUBIECTUL I

- a) $l = 11$
- b) $AC = 3$.
- c) $AB = \sqrt{2}$.
- d) $\bar{z} = 2 - 3i$.
- e) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
- f) $\cos A = 0$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $(f \circ g)(x) = 7 - 6x$.
- b) Punctul de intersecție este $A(1,1)$
- c) $f(1) + f(2) + \dots + f(10) = 145$.
- d) $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
- e) $\sqrt{f(3) + g(3)} = 2 \in \mathbb{N}$.

2.

- a) $f'(x) = 2x + \frac{2}{x^3}$.
- b) $x = 0$ este ecuația asymptotei verticale.
- c) $f'(x) = \frac{2x^4 + 2}{x^3} < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare pe $(-\infty, 0)$.
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f(x) = \infty$.
- e) $\int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx = \frac{7\sqrt{2} - 8}{6}$.

SUBIECTUL III

- a) Efectuăm calculul: $(x + 3i)(y + 3i) - 3i = xy + 3ix + 3iy - 9 - 3i$.

- b)** $(x \circ y) \circ z = (x + 3i)(y + 3i)(z + 3i) - 3i$
 $x \circ (y \circ z) = (x + 3i)(y + 3i)(z + 3i) - 3i \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \forall x, y, z \in \mathbf{C}$
- c)** Efectuăm calculul: $x \circ e = (x + 3i)(e + 3i) - 3i = x + 3i - 3i = x \quad \forall x \in \mathbf{C}$.
- d)** Pentru $a = 1 - 2i$ și $b = 1 - i \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, avem: $a \circ b = (a + 3i)(b + 3i) - 3i = -1 \in \mathbf{R}$.
- e)** Fie $P(n) : \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ n\ ori} = (x + 3i)^n - 3i$.
 $P(1) : x = x \text{ (A).}$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k) : \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k\ ori} = (x + 3i)^k - 3i, \text{ iar } P(k+1) : \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k+1\ ori} = (x + 3i)^{k+1} - 3i.$$

$$\begin{aligned} \text{Dar } \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k+1\ ori} &= \left(\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k\ ori} \right) \circ x = (x + 3i)^k - 3i \circ x = \\ &= [(x + 3i)^k - 3i + 3i](x + 3i) - 3i = (x + 3i)^{k+1} - 3i. \end{aligned}$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

- f)** Folosind e) avem că $z = (4 + 3i)^{2002} - 3i$ de unde $\overline{z + 3i} = (4 - 3i)^{2007}$
g) Folosind e) ecuația devine: $(x + 3i)^2 - 3i = -3i \Leftrightarrow (x + 3i)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3i$.

SUBIECTUL IV

- a)** $f_0(-x) = e^{-x} + e^{-(x)} = e^{-x} + e^x = f_0(x), \forall x \in \mathbf{R}$.
b) $f_0(x) \geq 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} \geq 2 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 \geq 0$ (A)
c) $f_1(x) = (f_0(x))' = e^x - e^{-x}$.
d) Fie $P(n) : f_{2n}(x) = f_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$.
 $P(0) : f_0(x) = f_0(x)$ (A).

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 0$.

$$P(k) : f_{2k}(x) = f_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}, \text{ iar}$$

$$P(k+1) : f_{2k+2}(x) = f_0(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}. \text{ Dar:}$$

$$\begin{aligned} f_{2k+2}(x) &= (f_{2k+1}(x))' = \left((f_{2k}(x))' \right)' = \left((f_0(x))' \right)' = (f_1(x))' = (e^x - e^{-x})' = \\ &= e^x + e^{-x} = f_0(x). \text{ De unde } P(n) \text{ este (A) } \forall n \in \mathbf{N}^*. \text{ Deci } f_{2n}(x) = f_0(x), \forall x \in \mathbf{R}. \\ \text{Dar } f_{2n+1}(x) &= (f_{2n}(x))' = (f_0(x))' = f_1(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

e) $\int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x (f_0(t))' dt = f_0(t)|_0^x = f_0(x) - f_0(0) = f_0(x) - 2, \forall x \in \mathbf{R}.$

f) Folosind **d)** rezultă că $f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_{2007}(x) = 1004f_0(x) + 1004f_1(x) = 1004(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}) = 2008e^x$. Atunci integrala devine:

$$\int_0^1 2008e^x dx = 2008e^x|_0^1 = 2008(e-1).$$

g) Folosind **d)** rezultă că $f_0(0) = f_2(0) = \dots = f_{2k}(0) = 2$ și $f_1(0) = f_3(0) = \dots = f_{2k+1}(0) = 0$. Dacă n este număr par atunci: $n = 2k; k \in \mathbf{N}$.

Avem $f_0(0) + f_1(0) + \dots + f_{2k}(0) = 2k + 2 = n + 2$, iar dacă n este impar atunci

$n = 2k + 1; k \in \mathbf{N}$ și $f_0(0) + f_1(0) + \dots + f_{2k+1}(0) = 2k + 2 = n - 1 + 2 = n + 1$. Deci limita cerută este 1.