

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianța064

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 1)$.

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la A la B .
- (4p) b) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului (AC) .
- (4p) c) Să se calculeze lungimea medianei din B a triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se calculeze $\cos^2 60^\circ$.
- (2p) f) Să se determine conjugatul numărului complex $3i^2 + 4i$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2$.
- (3p) b) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Să se calculeze $f(f(2))$.
- (3p) c) Să se determine probabilitatea ca un element n al multimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $2^n \leq n^2$.
- (3p) d) Să se calculeze C_{10}^2 .
- (3p) e) Să se rezolve ecuația $\log_2(x+1) = 3$, $x > -1$.
- 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$.
 - (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 - (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
 - (3p) c) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
 - (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 - (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianța 064

SUBIECTUL III (20p)

În multimea $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B_k = (I_3 + A)^k, k \in \mathbf{N}^*$$

- (4p) a) Să se calculeze $\det(A)$.
- (4p) b) Să se calculeze suma elementelor matricei A^2 .
- (4p) c) Să se calculeze A^3 .
- (2p) d) Să se calculeze $\det(B_1)$.
- (2p) e) Folosind metoda inducției matematice, să se arate că $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 4n^2 - n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\det(B_1 + B_2 + \dots + B_{10})$.
- (2p) g) Să se calculeze suma elementelor matricei $B_1 + B_2 + \dots + B_{10}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ și sirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$,

$$x_n = \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \dots + \frac{1}{f(n)}, n \in \mathbf{N}^*$$

- (4p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in (0, \infty)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) d) Să se calculeze $\int_1^a f(x)dx$, $a \in (1, \infty)$.
- (2p) e) Să se arate că $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2}$.
- (2p) g) Să se arate că dacă numerele strict pozitive a, b, c sunt în progresie geometrică atunci numerele $\int_1^a f(x)dx$, $\int_1^b f(x)dx$, $\int_1^c f(x)dx$ sunt în progresie aritmetică.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 64

SUBIECTUL I

- a) $AB = 2\sqrt{2}$.
 b) M este mijlocul segmentului (AC) $\Rightarrow M(3, 2)$.
 c) $MB = 3$.
 d) $S_{ABC} = 6$.
 e) $\cos^2 60^\circ = \frac{1}{4}$.
 f) $\bar{z} = -3 - 4i$

SUBIECTUL II

1.

- a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 = 15$.
 b) $(f \circ f)(2) = 16$.
 c) $p = \frac{3}{4}$.
 d) $C_{10}^2 = 45$.
 e) $x = 7$.
 2.
 a) $f'(x) = 3x^2 + 3$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 6$
 c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
 d) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{4}$.
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL III

- a) $\det(A) = 0$.
 b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci suma elementelor matricei este 8.
 c) $A^3 = O_3$.

d) $B_1 = I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B_1) = 1.$

e) Fie $P(n): B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 4n^2 - n \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(1)$ este adevărată din **d)**.

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

Dar $B_{k+1} = (A + I_3)^{k+1} = (A + I_3)^k \cdot (A + I_3) = B_k \cdot B_1 =$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 2k & 4k^2 - k \\ 0 & 1 & 4k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) & 4(k+1)^2 - k - 1 \\ 0 & 1 & 4(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f) Folosind **e)** avem $\det(B_1 + B_2 + \dots + B_{10}) = \begin{vmatrix} 10 & 110 & 1485 \\ 0 & 10 & 220 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1000.$

g) Din **f)** suma elementelor este 1845.

SUBIECTUL IV

a) $f(1) = 1.$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$

d) $\int_1^a f(x) dx = \ln a - \ln 1 = \ln a.$

e) $x_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$

g) Din **d)** $\int_1^a f(x) dx = \ln a, \int_1^b f(x) dx = \ln b, \int_1^c f(x) dx = \ln c.$

Dacă a, b, c sunt în progresie geometrică atunci $b^2 = ac$

$\Rightarrow 2 \ln b = \ln a + \ln c \Rightarrow \ln b = \frac{\ln a + \ln c}{2}$, deci numerele $\ln a$, $\ln b$, $\ln c$ sunt în progresie aritmetică.