

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta062

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 2)$, $B(2, 4)$, $C(4, 0)$.

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la A la B .
- (4p) b) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului (AC) .
- (4p) c) Să se calculeze lungimea medianei din B a triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se calculeze $\cos^2 30^\circ$.
- (2p) f) Să se calculeze conjugatul numărului complex $3i^2 + 6i$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $1^5 - 2^4 + 3^3 - 4^2 + 5^1$.
- (3p) b) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x$. Să se calculeze $f(f(2))$.
- (3p) c) Să se determine probabilitatea ca un element n al mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $2^n \leq n^2$.
- (3p) d) Să se calculeze C_{20}^2 .
- (3p) e) Să se rezolve ecuația $\log_2(x+1) = 2$, pentru $x > -1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^5$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \cdot f'(x)}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 062

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și legea de compozиție $X \circ Y = X + Y - 3I_3$, $\forall X, Y \in M_3(\mathbf{R})$.

- (4p) a) Să se calculeze matricea A^2 .
- (4p) b) Să se calculeze matricea A^{2007} .
- (4p) c) Să se calculeze matricea $A \circ A$.
- (2p) d) Să se arate că $X \circ Y = Y \circ X$, $\forall X, Y \in M_3(\mathbf{R})$.
- (2p) e) Să se arate că $(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z)$, $\forall X, Y, Z \in M_3(\mathbf{R})$.
- (2p) f) Să se arate că există $E \in M_3(\mathbf{R})$, astfel ca $X \circ E = X$, $\forall X \in M_3(\mathbf{R})$.
- (2p) g) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$\underbrace{X \circ X \circ \dots \circ X}_{de n ori} = nX - 3(n-1)I_3, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall X \in M_3(\mathbf{R}).$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_0(x) = xe^x$, $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ și sirul $a_n = f_1(0) + f_2(0) + \dots + f_n(0)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se calculeze $f_0(0)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f_1(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x) dx$.
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = e^x(x+n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se arate că $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, pentru $n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$.
- (2p) g) Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \geq \int_0^1 f_n(x) dx$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 062

Varianta 62

SUBIECTUL I

- a) $AB = 2\sqrt{2}$.
 b) M este mijlocul segmentului (AC) $\Rightarrow M(2,1)$.
 c) $MB = 3$.
 d) $S_{ABC} = 6$.
 e) $\cos^2 30^\circ = \frac{3}{4}$.
 f) $\bar{z} = -3 - 6i$

SUBIECTUL II

1.

- a) $1^5 - 2^4 + 3^3 - 4^2 + 5^1 = 1$.
 b) $(f \circ f)(2) = 16$.
 c) $p = \frac{3}{4}$.
 d) $C_{20}^2 = 190$.
 e) $x = 3$.

2.

- a) $f'(x) = 5x^4$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 5$.
 c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
 d) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$.
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \cdot f'(x)} = \frac{1}{5}$.

SUBIECTUL III

- a) $A^2 = I_3$.
 b) Din a) $\Rightarrow A^2 = I_3 \Rightarrow A^{2007} = (A^2)^{1003} \cdot A = (I_3)^{1003} \cdot A = I_3 \cdot A = A$.

- c) $A \circ A = A + A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
- d) $X \circ Y = X + Y - 3I_3, Y \circ X = Y + X - 3I_3 \Rightarrow X \circ Y = Y \circ X, \forall X, Y \in M_3(\mathbf{R})$.
- e) $(X \circ Y) \circ Z = X + Y + Z - 6I_3 = X \circ (Y \circ Z)$
- f) $X \circ E = X \Leftrightarrow X + E - 3I_3 = X \Leftrightarrow E = 3I_3$.
- g) Fie $P(n): \underbrace{X \circ X \circ \dots \circ X}_{denori} = nX - 3(n-1)I_3, n \in \mathbf{N}^*$.

$P(1): X = X$, adevărată.. Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), $k \geq 1$.

$$P(k): \underbrace{X \circ X \circ \dots \circ X}_{dekor} = kX - 3(k-1)I_3, P(k+1): \underbrace{X \circ X \circ \dots \circ X}_{dekor+1} = (k+1)X - 3kI_3.$$

$$\text{Dar } \underbrace{X \circ X \circ \dots \circ X}_{dekor+1} = \left(\underbrace{X \circ X \circ \dots \circ X}_{dekor} \right)^{P(k)} \circ X = (kX - 3(k-1)I_3) \circ X = (k+1)X - 3kI_3.$$

De unde $P(n)$ este (A), $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV

- a) $f_0(0) = 0$.
- b) $f_1(x) = f_0'(x) = e^x(x+1)$.
- c) $\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 (f_0(x))' dx = e$.
- d) Fie $P(n): f_n(x) = e^x(x+n)$, $n \in \mathbf{N}$.

$$P(0): f_0(x) = e^x x, (\text{A}).$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), $k \geq 0$.

$$P(k): f_k(x) = e^x(x+k), \text{ iar } P(k+1): f_{k+1}(x) = e^x(x+k+1).$$

$$\text{Dar } f_{k+1}(x) = f_k'(x) = (e^x(x+k))' = e^x(x+k) + e^x = e^x(x+k+1) (\text{A}).$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

e) $a_n = f_1(0) + f_2(0) + \dots + f_n(0) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$.

g) Vom demonstra că $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in [0,1]$.

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \stackrel{\text{d)}{\Leftrightarrow} e^x(x+n+1) \geq e^x(x+n) \Leftrightarrow x+n+1 \geq x+n \Leftrightarrow 1 \geq 0 (\text{A}).$$

$$\text{Aplicând monotonia integralei definite} \Rightarrow \int_0^1 f_{n+1}(x) dx \geq \int_0^1 f_n(x) dx.$$