

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
**Varianta ....061**

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**NOTĂ.**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

Se consideră dreptunghiul  $ABCD$  cu  $AB = 8$  și  $AD = 6$  și  $O$  mijlocul segmentului  $AC$ .

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului  $(AC)$ .
- (4p) b) Să se calculeze aria dreptunghiului  $ABCD$
- (4p) c) Să se calculeze  $\operatorname{tg}(B\hat{A}C)$ .
- (4p) d) Să se calculeze distanța de la punctul  $O$  la dreapta  $AB$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât dreapta  $x + ay + b = 0$  să conțină punctele  $M(1,0)$  și  $N(9,6)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze determinantul matricei  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ .
- (3p) b) Să se determine numerele  $n \in \mathbf{N}$  pentru care  $n! < 20$ .
- (3p) c) Să se determine  $x > 0$ , dacă  $\lg x - \lg 2 = \lg 8$ .
- (3p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului  $X^3 - 2X^2 + 7$  la polinomul  $X - 2$ .
- (3p) e) Să se determine  $f^{-1}(5)$ , dacă  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3$ , unde  $f^{-1}$  este inversa funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \ln x$ .

- (3p) a) Să se determine  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ .
- (3p) c) Să se arate că  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ .
- (3p) d) Să se demonstreze că  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in (1; \infty)$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$ .

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră ecuația  $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$  și numerele complexe  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$  și

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

- (4p) a) Să se arate că numerele  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației date.
- (4p) b) Să se arate că numărul  $x_2$  este conjugatul numărului  $x_1$ .
- (4p) c) Să se determine  $x_1 + x_2$  și să se arate că  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ .
- (2p) d) Să se arate că  $x_1^4 = x_2^4 = -1$ .
- (2p) e) Folosind eventual egalitatea,  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{C}$ , să se calculeze  $x_1^3 + x_2^3$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $x_1^{2007} + x_2^{2007}$ .
- (2p) g) Să se arate că sirul de numere  $x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2, \dots, x_1^n + x_2^n, \dots$  are cel puțin patru elemente diferite.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- (4p) b) Să se determine ecuația asimptotei către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (4p) c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este crescătoare pe  $[2; \infty)$ .
- (2p) d) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .
- (2p) e) Să se arate că  $f(x) \geq 4$ ,  $\forall x \in [2; \infty)$ .
- (2p) f) Să se arate că  $\int_2^4 f(x)dx \geq 8$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f(n)}{n} \right)^n$ .

**Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările**

**Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale**

### Varianta 61

#### SUBIECTUL I

- a)  $AC=10$ .
- b)  $S_{ABCD} = 48$ .
- c)  $\tg(B\hat{A}C) = \frac{3}{4}$ .
- d) Distanța de la O la dreapta AB este 3.
- e)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .
- f)  $b = -1$ ,  $a = -\frac{4}{3}$ .

#### SUBIECTUL II

1.

- a)  $\det(A) = -11$ .
- b) Numerele sunt: 0, 1, 2, 3.
- c)  $x = 16$ .
- d) Restul este 7.
- e)  $f^{-1}(5) = 1$ .

2.

- a)  $f'(x) = \frac{1}{x}; x > 0$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ .
- c) Deoarece  $f'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ .
- d) Deoarece  $f$  este strict crescătoare pe  $[1, \infty)$  și  $f(1) = 0$  atunci  $f(x) > f(1) = 0 \quad \forall x > 1$ .
- e)  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 2}{2}$ .

#### SUBIECTUL III

- a)  $x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$ .
- b)  $\overline{x_2} = x_1$ .
- c)  $x_1 + x_2 = \sqrt{2}; x_1^2 = i; x_2^2 = -i; \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0$
- d) Folosind c) avem că  $x_1^4 = -1$  și  $x_2^4 = -1$ .

e)  $x_1^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$ ;  $x_2^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-i-1)$  deci  $x_1^3 + x_2^3 = -\sqrt{2}$ .

f)  $x_1^{2007} + x_2^{2007} = (x_1^4)^{501} \cdot x_1^3 + (x_2^4)^{501} \cdot x_2^3 = \sqrt{2}$ .

g) Deoarece  $x_1 + x_2 = \sqrt{2}$ ,  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ ,  $x_1^3 + x_2^3 = -\sqrt{2}$ ,  $x_1^4 + x_2^4 = -2$ , atunci sirul conține cel puțin patru elemente diferite.

#### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \frac{4}{x} \right) = \infty$ , rezultă că funcția nu are asimptotă orizontală.

Căutăm asimptotă oblică:  $y = mx + n$  unde:  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right) = 1$  și

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 0$ . Rezultă că dreapta  $y = x$  este asimptotă oblică spre  $+\infty$ .

c)  $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2} > 0$ ,  $\forall x \in (2, \infty)$  ⇒  $f$  este strict crescătoare pe  $[2, \infty)$ .

d) Ecuția  $f'(x) = 0$  are soluțiile  $x_1 = -2$  și  $x_2 = 2$ . Cum  $f'(x) \geq 0$ ,  $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$  ⇒  $f$  este crescătoare pe  $(-\infty, -2]$  și crescătoare pe  $[2, \infty)$ ;  $f'(x) \leq 0$ ,  $x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$  ⇒  $f$  este descrescătoare pe  $[-2, 0)$  și descrescătoare pe  $(0, 2]$ . Deci punctele de extrem sunt  $x_1 = -2$  și  $x_2 = 2$ .

e) Dacă  $x \geq 2$  atunci:  $f(x) \geq 4 \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} \geq 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$  (A).

f) Folosind e) și integrând obținem  $\int_2^4 f(x) dx \geq \int_2^4 4 dx = 8$ .

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f(n)}{n} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{n^2} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{4} \cdot 4} = e^4$ .